

## 25. Vierländerwettbewerb 2018 25. soutěž čtyř zemí 2018



Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik  
Horní Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

### Aufgabe 1 – Úloha 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

**Aufgabe 1.** Adam Ries gab im Jahre 1533 in seinem Buch „Annaberger Brotordnung“ Tabellen an, in denen die Vielfachen vom Grundpreis von 1 Pfund einer Ware ausgerechnet wurden. (Mit Pfund gab man damals die Masse einer Ware an.) Solche Tabellen gab es für viele Fälle: wenn 1 Pfund einer Ware 1 Pfennig oder 2 Pfennige ... oder 5 Gulden kostete. Mit solchen Tabellen konnte der Gesamtpreis von mehreren Pfund einer Ware leicht ermittelt werden.

Kostete beispielsweise 1 Pfund einer Ware 7 Pfennige, so lautete seine Tabelle:

Masse der Ware in Pfund		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	hmotnost zboží v librách	
Preis der Ware in	Gulden	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	cena zboží v:	guldenech
	Groschen	0	1	1	2	2	3	4	4	5	5	11	17	2		groších
	Pfennige	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	8	6	4		fenicích

Beachte: 1 Gulden entsprach 21 Groschen, 1 Groschen entsprach 12 Pfennigen.

- Wie schrieb Adam Ries immer? „Mache die Probe!“ Prüfe den in der Tabelle angegebenen Preis für 7 Pfund der Ware und zeige, dass das 7-fache von 7 Pfennigen tatsächlich 4 Groschen und 1 Pfennig sind.
- Erkläre, wie du mithilfe dieser Tabelle den Preis von 75 Pfund dieser Ware (von der 1 Pfund 7 Pfennige kostete) berechnen kannst, ohne Multiplizieren zu müssen. Gib das 75-fache von 7 Pfennigen in Gulden, Groschen und Pfennigen mit einer möglichst kleinen Anzahl von Münzen an.
- Ergänze die nachfolgende Tabelle wie Adam Ries, wenn 1 Pfund Ware 11 Pfennige kostete. Übertrage die Tabelle auf dein Lösungsblatt und schreibe deine Nebenrechnungen auf. Gib den Preis mit möglichst wenigen Münzen an.

Masse der Ware in Pfund		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	hmotnost zboží v librách	
Preis der Ware in	Gulden	0	0	0	0	0	0	0	0						cena zboží v:	guldenech
	Groschen	0	1	2	3	4	5	6	7							groších
	Pfennige	11	10	9	8	7	6	5	4							fenicích

- Ein Kaufmann wollte möglichst viele Ellen Tuch kaufen, und zwar rotes Tuch, die Elle für 7 Pfennige, und blaues Tuch, die Elle für 11 Pfennige. Wie viele Ellen Tuch konnte er maximal erwerben, wenn er von jeder Sorte ein ganzzahliges Vielfaches von Ellen kaufte (aber von jeder Sorte jeweils weniger als 10 Ellen), und wenn der Gesamtpreis genau eine ganze Anzahl Groschen betrug.

**Úloha 1.** Adam Ries vydal roku 1533 knihu „Annaberský chlebový řád“, ve kterém představil tabulky s vypočítanou základní cenou za 1 libru zboží (tenkrát se v librách uváděla hmotnost). Tyto tabulky byly určeny pro celou řadu případů: když 1 libra určitého zboží stála 1 feník nebo 2 feníky... nebo 5 guldenů. Díky těmto tabulkám se dala jednoduše určit celková cena zboží o několika librách.

Když například 1 libra zboží stála 7 feníků, pak příslušná tabulka vypadala takto:

Nezapomeň: 1 gulden odpovídal 21 grošům, 1 groš odpovídal 12 feníkům.

- Co vždycky říkal Adam Ries? „Udělej zkoušku!“ Ověř cenu za 7 liber zboží uvedenou v tabulce a ukaž, že 7násobek 7 feníků jsou skutečně 4 groše a 1 feník.
- Vysvětli, jak se dá pomocí této tabulky vypočítat cena za 75 liber tohoto zboží (které stojí 7 feníků za 1 libru), aniž bys musel násobit. Uveď 75násobek 7 feníků v guldenech, groších a fenicích s použitím co nejmenšího počtu mincí.
- Doplň následující tabulku po vzoru Adama Riese, pokud stála 1 libra daného zboží 11 feníků. Přepiš tabulku na svůj list s řešením a napiš své vedlejší výpočty. Cenu vyjádři pomocí co nejmenšího počtu mincí.

- Jeden kupec si chtěl koupit co nejvíce loktů sukna, a sice červeného sukna, které stálo 7 feníků za loket, a modrého sukna, které stálo 11 feníků za loket. Kolik loktů sukna si mohl maximálně pořídit, pokud si od každého druhu koupil celý násobek loktů (a zároveň od každého druhu vždy méně než 10 loktů) a pokud celková cena v groších byla celé číslo?

## 25. Vierländerwettbewerb 2018 25. soutěž čtyř zemí 2018



Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik  
Horní Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

### **Aufgabe 2 – Úloha 2**

*Hinweis:* Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

*Poznámka:* Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

**Aufgabe 2.** In wenigen Tagen wird das erste Spiel der Fußballweltmeisterschaft 2018 angepfiffen. Die 32 qualifizierten Mannschaften spielen in der Gruppenphase in Gruppen mit je 4 Mannschaften. Vielleicht endet eine solche Gruppe mit folgender Tabelle:

Abschlusstabelle/ Závěrečná tabulka			
Mannschaft tým	gewonnen vítězství	unentschieden remízy	verloren porážky
A	3	0	0
B	1	1	1
C	0	2	1
D	0	1	2

In der Vierer-Gruppe wurden genau 6 Spiele ausgetragen, jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft genau einmal. Es ist bekannt, dass das Spiel C gegen D unentschieden mit 2 : 2 Toren endete. Dieses Ergebnis ist in der folgenden Tabelle bereits eingetragen.

Anzeigetafel/ Tabulka skóre							
Spiele	A gegen B	A gegen C	A gegen D	B gegen C	B gegen D	C gegen D	utkání
	A proti B	A proti C	A proti D	B proti C	B proti D	C proti D	
Torestand						2 : 2	skóre

- a) Angenommen, alle 4 Mannschaften erzielten insgesamt 8 Tore. Zeige, dass die Ergebnisse aller Spiele bereits eindeutig bestimmt sind, wenn die oben stehende Abschlusstabelle gilt. Übertrage die Spielstand-Tabelle auf dein Lösungsblatt und ergänze die Tabelle, indem du für jedes Spiel einträgst, wie viele Tore jede Mannschaft geschossen hat.
- b) Angenommen, alle 4 Mannschaften haben insgesamt 12 Tore geschossen, wobei die Mannschaft D die meisten Tore schoss. Finde eine Möglichkeit der Spielausgänge, sodass die Abschlusstabelle ebenfalls gilt. Übertrage dazu erneut die Tabelle auf dein Lösungsblatt und ergänze die Tabelle, indem du für jedes Spiel einträgst, wie viele Tore jede Mannschaft geschossen hat.

Über den Endstand einer anderen Gruppe mit vier Mannschaften war folgendes Gespräch zu hören:

- (1) Finn: „Mannschaft E schoss mehr Tore als Mannschaft F“
- (2) Klara: „Mannschaft G schoss mehr Tore als Mannschaft H“
- (3) Marvin: „Mannschaft F schoss mehr Tore als Mannschaft H“
- (4) Lena: „Mannschaft H schoss mehr Tore als Mannschaft E“
- (5) Paul: „Mannschaft F schoss mehr Tore als Mannschaft G“

Es ist bekannt, dass es keine zwei Mannschaften gab, die die gleiche Anzahl von Toren erzielte.

- c) Begründe, warum die fünf Aussagen nicht alle gleichzeitig wahr sein können.
- d) Ermittle eine mögliche Reihenfolge der Mannschaften nach der Anzahl der erzielten Tore, wenn genau eine der Aussagen (1) bis (5) falsch ist und die anderen vier Aussagen alle wahr sind.

**Úloha 2.** Za několik dní se rozehraje první utkání mistrovství světa ve fotbale 2018. 32 týmů, které se kvalifikovaly, budou hrát ve skupinách po 4. Jedna skupina možná dopadne následovně:

V této čtyřčlenné skupině se odehrálo právě 6 zápasů, každý tým hrál se všemi ostatními právě jednou. Víme, že zápas C proti D skončil remízou 2:2. Tento výsledek je už uveden v následující tabulce skóre.

- a) Předpokládejme, že všechny 4 týmy vstřelily celkem 8 branek. Ukaž, že jsou tím už jednoznačně určeny výsledky všech utkání, pokud platí výše uvedená závěrečná tabulka. Přepiš si tabulku skóre na svůj list s řešením a doplň ji tak, aby byl u každého utkání zanesen počet branek, které každé mužstvo vstřelilo.
- b) Předpokládejme, že všechny 4 týmy dohromady vstřelily celkem 12 branek, přičemž tým D jich vstřelil nejvíce. Uveď, s jakým výsledkem mohly skončit dané zápasy, pokud rovněž platí výše uvedená závěrečná tabulka. Na svůj list s řešením si k tomu opět přepiš tabulku skóre a doplň ji tak, aby byl u každého utkání zanesen počet branek, které každé mužstvo vstřelilo.

O konečném výsledku v jiné skupině se čtyřmi týmy se dala odposlechnout následující diskuze:

- (1) Finn: „Tým E vstřelil více branek než tým F.“
- (2) Klára: „Tým G vstřelil více branek než tým H.“
- (3) Marvin: „Tým F vstřelil více branek než tým H.“
- (4) Lenka: „Tým H vstřelil více branek než tým E.“
- (5) Pavel: „Tým F vstřelil více branek než tým G.“

Víme, že žádné dva týmy nedaly stejný počet gólů.

- c) Odůvodni, proč těchto pět výpovědí nemůže být pravdivých zároveň.
- d) Zjisti možné pořadí týmů podle počtu vstřelených gólů, pokud je právě jedna z těchto pěti výpovědí (1) až (5) nepravdivá a ostatní čtyři výpovědi pravdivé.

## 25. Vierländerwettbewerb 2018 25. soutěž čtyř zemí 2018



Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik  
Horní Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

### Aufgabe 3 – Úloha 3

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

**Aufgabe 3.** Du erinnerst Dich? Auf dem Rechenbrett, wie es Adam Ries in seiner Rechenschule verwendete, sind Linien für die Einer-, Zehner-, Hunderter- und Tausender-Stellen gezeichnet. Die Zwischenräume zeigen die Werte Fünf, Fünfzig und Fünfhundert an.

Werden Rechenpfennige auf die Linien oder in die Zwischenräume gelegt, nehmen sie die entsprechenden Werte an.

In der Abbildung sind im linken Feld die Zahl 23 (mit fünf Rechenpfennigen) und im rechten Feld die Zahl 56 (mit drei Rechenpfennigen) gelegt.

Beim Auflegen der Rechenpfennige sind folgende Regeln zu beachten:

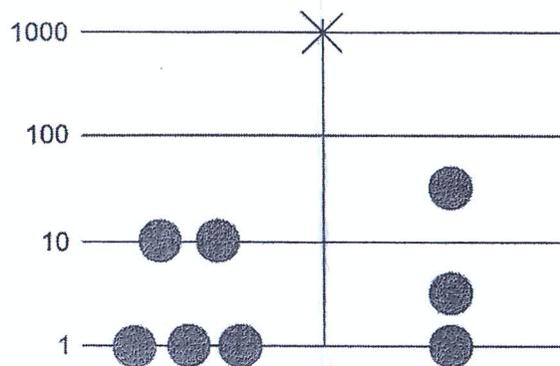
- Auf jeder Linie dürfen nicht mehr als 4 Rechenpfennige liegen.
- In jedem Zwischenraum darf nicht mehr als 1 Rechenpfennig liegen.

Wir wollen uns auf dem Rechenbrett mit Additionsaufgaben beschäftigen, in denen zwei oder drei Summanden addiert werden und jeder Summand eine Zahl zwischen 1 und 49 sein darf.

Wir zählen in den folgenden Aufgaben die erforderlichen Rechenpfennige für jeden Summanden und für die richtig ausgerechnete Summe. Für die Additionsaufgabe  $10 + 20 = 30$  schreiben wir für die Anzahl der erforderlichen Rechenpfennige kurz  $1R + 2R = 3R$ . Das muss aber keine richtige gerechnete Gleichung ergeben, wie beispielsweise für  $2 + 3 = 5$ , denn dafür schreiben wir  $2R + 3R = 1R$ .

- a) Finde eine Additionsaufgabe mit  $1R + 2R = 3R$ , wenn die Summe genau 25 betragen soll.
- b) Es gibt genau eine Additionsaufgabe mit  $1R + 1R = 1R$ . Finde diese.
- c) Zeige, dass es keine Additionsaufgabe gibt, für die  $3R + 3R = 3R$  gilt.
- d) Gib eine Additionsaufgabe mit  $3R + 3R + 3R = 9R$  an.

**Úloha 3.** Vzpomínáš si? Na počítadle, které Adam Ries používal ve své početní škole, jsou vyznačené linie pro jednotky, desítky, stovky a tisíce. Mezery mezi liniemi značí hodnoty pět, padesát a pět set.



Pokud se na tyto linie nebo do mezer mezi nimi položí početní feniky, pak nabývají odpovídajících hodnot.

Na obrázku je v levém poli vyznačeno číslo 23 (pět početními feniky) a v pravém poli číslo 56 (třemi početními feniky).

Během pokládání početních feniků musíme dodržovat následující pravidla:

- Na každé linii nesmějí ležet více než 4 početní feniky.
- V každé mezeře mezi liniemi nesmí ležet více než 1 početní fenik.

Na počítadle budeme řešit příklady sčítání se dvěma nebo třemi sčítanci, z nichž každý může nabývat hodnoty mezi 1 a 49.

V následujících příkladech budeme počítat potřebné početní feniky pro každý sčítanec a pro správně vypočítaný součet. U příkladu  $10 + 20 = 30$  zapíšeme počet potřebných feniků stručně jako  $1F + 2F = 3F$ . Z toho nám ale nemusí vyjít správně vypočítaná rovnice jako třeba  $2 + 3 = 5$ , protože v tomto případě bychom napsali  $2F + 3F = 1F$ .

- a) Najdi příklad se zápisem  $1F + 2F = 3F$ , pokud má být součet právě 25.
- b) Existuje právě jeden příklad se zápisem  $1F + 1F = 1F$ . Najdi jej.
- c) Ukaž, že neexistuje příklad, pro který by platil zápis  $3F + 3F = 3F$ .
- d) Najdi jeden příklad se zápisem  $3F + 3F + 3F = 9F$ .