22. Vierländerwettbewerb 2015
22. soutěž čtyř zemí 2015

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 1 – Úloha 1

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

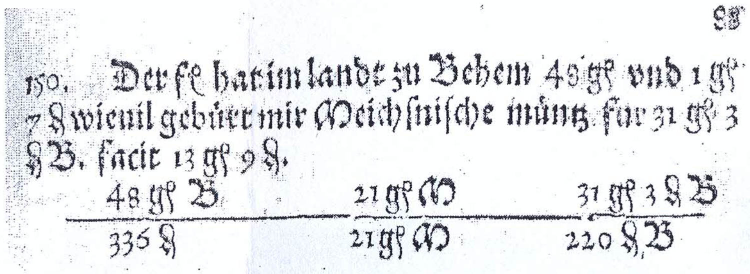
Verschiedene Gulden: Zur Zeit, als Adam Ries lebte, galt in Sachsen folgende Umrechnung

1 sächsischer Gulden (Gu)	= 21 sächsische Groschen (Gr),
1 sächsischer Groschen (Gr)	= 12 sächsische Pfennige (Pf).

a) Ein sächsischer Kaufmann hat insgesamt 60 Groschen und 60 Pfennige eingenommen. Gib den Geldbetrag in sächsischen Gulden, Groschen und Pfennigen an, so dass die Anzahl der Münzen so klein wie möglich ist.

b) Zeige, dass es möglich ist, den Betrag von 1 sächsischen Gulden in genau 120 Münzen darzustellen.

In seinem 3. Rechenbuch von 1550, „Practica" genannt, erklärt Adam Ries auf Seite 88, dass in Böhmen eine andere Umrechnung gilt (siehe nebenstehende Abbildung):



1 böhmischer Gulden	= 48 böhmische Groschen,
1 böhmischer Groschen	= 7 böhmische Pfennige.

c) Ein böhmischer Kaufmann hat insgesamt 60 Groschen und 60 Pfennige eingenommen. Gib den Geldbetrag in böhmischen Gulden, Groschen und Pfennigen an, so dass die Anzahl der Münzen so klein wie möglich ist.

d) Zeige, dass es möglich ist, den Betrag von 1 böhmischen Gulden in genau 120 Münzen darzustellen.

Beim Umtausch erhielt man zur damaligen Zeit für 9 sächsische Pfennige 8 böhmische Pfennige. Ein sächsischer Groschen war also mehr wert als ein böhmischer Groschen, denn

1 sächsischer Gr = 12 sächsische Pf > 9 sächsische Pf =
= 8 böhmische Pf > 7 böhmische Pf = 1 böhmischer Gr.

e) Untersuche, welcher Gulden mehr wert ist, der sächsische oder der böhmische.

f) Ein sächsischer Kaufmann und ein böhmischer Kaufmann haben die gleiche Anzahl Münzen, der eine sächsische Groschen und Pfennige, der andere böhmische Groschen und Pfennige. Beide Kaufleute haben den gleichen Geldbetrag. Wie viel Geld könnte es sein?

Rozdílné zlaťáky: V době, kdy žil Adam Ries, se v Sasku používal následující přepočet

1 saský zlatý (zl)	= 21 saských grošů (gr),
1 saský groš (gr)	= 12 saských feniků (fe).

a) Jeden saský kupec vydělal celkem 60 grošů a 60 feniků. Převeď tuto částku na saské zlaťáky, groše a feniky tak, aby počet mincí byl co nejnižší.

b) Dokaž, že je možné obnos 1 saského zlaťáku rozdělit na přesně 120 mincí.

Ve své 3. početnici z roku 1550 zvané „Practica" vysvětluje Adam Ries na straně 88, že se v Čechách používá přepočet jiný (viz obrázek vedle):

1 český zlatý = 48 českých grošů,
1 český groš = 7 českých feniků.

c) Český kupec vydělal celkem 60 grošů a 60 feniků. Převeď částku na české zlaťáky, groše a feniky tak, aby počet mincí byl co nejnižší.

d) Dokaž, že je možné rozdělit částku 1 český zlaťák na přesně 120 mincí.

Při výměně peněz tehdy člověk dostal za 9 saských feniků 8 feniků českých. Jeden saský groš měl tedy větší hodnotu než jeden český groš, protože

1 saský gr = 12 saských fe > 9 saských fe =
= 8 českých fe > 7 českých fe = 1 český gr.

e) Zjisti, který zlaťák má větší hodnotu, saský nebo český?

f) Saský kupec a český kupec mají stejný počet mincí. Jeden má saské groše a feniky, druhý české groše a feniky. Oba kupci mají stejnou sumu peněz. Kolik peněz by to mohlo být?

22. Vierländerwettbewerb 2015
22. soutěž čtyř zemí 2015

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

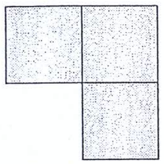
Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Mit Quadraten Muster legen: Um Muster zu legen, verwenden wir gleichgroße Quadrate. Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

(1) Zwei Quadrate heißen *benachbart*, wenn sie eine vollständige Quadratseite gemeinsam haben.

(2) Ein Muster aus mehreren Quadraten heißt *zusammenhängend*, wenn jedes Quadrat dieses Musters mindestens mit einem anderen Quadrat des Musters benachbart ist.

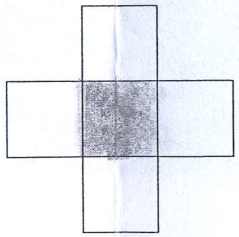
In der nebenstehenden Abbildung zeigt Beispiel 1 ein Muster aus 3 zusammen-hängenden Quadraten. Das Muster in Beispiel 2 ist dagegen nicht zusammen-hängend.



Beispiel 1
Příklad 1

Beispiel 2
Příklad 2

Wir wollen nun an Muster aus zusammenhängenden Quadraten alle möglichen Quadrate einzeichnen, die zu mindestens einem Quadrat des Musters benachbart sind. Wir nennen sie *Randquadrate*. In nebenstehender Abbildung besteht das Muster aus einem Quadrat. Für dieses Muster kann man 4 Randquadrate einzeichnen.



a) Zeichne ein Muster, das aus 2 zusammenhängenden Quadraten besteht und füge alle möglichen Randquadrate hinzu. Wie viele Randquadrate gibt es für 2 zusammenhängende Quadraten?

b) Wie viele Randquadrate sind höchstens möglich, wenn das Muster aus 4 zusammenhängenden Quadraten besteht? Zeichne ein solches Muster und erkläre, warum keine größere Anzahl von Randquadraten möglich ist.

c) Gib an, wie viele Randquadrate mindestens erforderlich sind, wenn das Muster aus 4 zusammenhängenden Quadraten besteht. Begründe deine Antwort!

Skládání obrazců ze čtverců: Ke složení obrazce použijeme stejně velké čtverce. Dohodneme se na následujícím pojmenování:

(1) Dva čtverce se nazývají sousedící, když mají společnou jednu celou stranu čtverce.

(2) Obrazec z několika čtverců označujeme jako *souvislý*, když každý čtverec v tomto obrazci sousedí alespoň s jedním jiným čtvercem.

Na obrázku vedle je v příkladu 1 vidět obrazec ze 3 souvislých čtverců. Oproti tomu obrazec v příkladu 2 není souvislý.

Nyní chceme do obrazce ze souvislých čtverců zakreslit všechny možné čtverce, které sousedí alespoň s jedním čtvercem z obrazce. Budeme jim říkat okrajové čtverce. Obrazec na vedlejším obrázku se skládá z jednoho čtverce. K tomuto čtverci lze zakreslit 4 okrajové čtverce.

a) Nakresli obrazec, který se skládá ze 2 souvislých čtverců a doplň všechny možné okrajové čtverce. Kolik okrajových čtverců existuje pro 2 souvislé čtverce?

b) Jaký největší počet okrajových čtverců je možný, když se obrazec skládá ze 4 souvislých čtverců? Nakresli takový obrazec a vysvětli, proč není možné vytvořit větší počet okrajových čtverců.

c) Uveď, jaký nejnižší počet okrajových čtverců se obrazec skládá ze 4 souvislých čtverců. Odůvodni svou odpověď.

22. Vierländerwettbewerb 2015
22. soutěž čtyř zemí 2015

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Rätselhafte Gleichungen: Christina und Kristýna lösen gern Kryptogramme. Solche mathematischen Rätsel sindhttp://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung Gleichungen mit unbekannten Zahlen, deren Ziffern durch Buchstaben ersetzt wurden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern. Die erste Ziffer einer Zahl darf nicht Null sein.

Christina hat selbst ein Kryptogramm erstellt. Ihr gefällt dieses Rätsel, weil **DREI** das deutsche Wort für die Zahl 3 und **SECHS** das deutsche Wort für die Zahl 6 ist.

$$\begin{array}{cccccc} & & D & R & E & I \\ + & & D & R & E & I \\ \hline = & S & E & C & H & S \end{array}$$

a) Weise nach, dass es für Christinas Kryptogramm keine Lösung geben kann.

Kristýna lacht, weil die Zahl 3 in der tschechischen Sprache **TŘI** und die Zahl 6 **ŠEST** heißen. Für ihr Kryptogramm gibt es jedoch Lösungen (dabei werden die kleinen Zeichen an den Buchstaben weggelassen):

$$\begin{array}{ccccc} & & T & R & I \\ + & & T & R & I \\ \hline = & S & E & S & T \end{array}$$

b) Gib alle Lösungen für Kristýnas Kryptogramm an.

Christina und Kristýna beschäftigen sich nun mit einem Kryptogramm, das an das Ehepaar Ries erinnert:

$$\begin{array}{ccccc} & A & D & A & M \\ + & A & N & N & A \\ \hline = & R & I & E & S \end{array}$$

Sie finden mit der Zuordnung A = 3, D = 7, E = 5, I = 9, M = 1, N = 2, R = 6 und S = 4 eine Lösung des Kryptogramms, wie nebenstehende Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 7 & 3 & 1 \\ + & 3 & 2 & 2 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 5 & 4 \end{array}$$

c) Gib für dieses Kryptogramm eine Lösung mit A = 2 an.

Für dieses Kryptogramm gibt es viele verschiedene Lösungen.

d) Gib eine Lösung dieses Kryptogramms an, bei der die vierstellige Zahl RIES so klein wie möglich ist. Begründe, dass es keine kleinere Möglichkeit für die Zahl RIES geben kann.

Tajemné rovnice: Christina a Kristýna rády řeší kryptogramy. Tyto matematické hádanky jsou rovnice s neznámými číslyhttp://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung, jejichž číslice byly nahrazeny písmeny. Stejné písmeno znamená stejné číslo, rozdílná písmena znamenají, že i čísla budou různá. První číslicí čísla nesmí být nula.

Christina sama sestavila jeden kryptogram. Tahle hádanka se jí líbí, protože **DREI** je německé slovo pro číslo 3 a **SECHS** je německé slovo pro číslo 6.

a) Dokaž, že Christinin kryptogram nemůže mít žádné řešení.

Kristýna se usmívá, protože číslo 3 se v češtině jmenuje **TŘI** a číslo 6 **ŠEST**. Její kryptogram ovšem vyřešit jde (když vynecháme háčky a čárky nad písmeny):

b) Uveď všechna možná řešení pro Kristýnin kryptogram.

Christina a Kristýna se teď zabývají kryptogramem, který nám připomíná manžele Riesovi:

Jak vidíme na vedlejším výpočtu, našly pro kryptogram jedno řešení, když přiřadily čísla k písmenům takto: A = 3, D = 7, E = 5, I = 9, M = 1, N = 2, R = 6 a S = 4.

c) Uveď řešení tohoto kryptogramu, když A = 2.

Tento kryptogram má mnoho různých řešení.

d) Uveď jedno řešení, při kterém bude čtyřmístné číslo RIES co nejmenší. Odůvodni, proč nemůže být pro číslo RIES řešením jiné menší číslo.