

21. Vierländerwettbewerb 2014

21. soutěž čtyř zemí 2014



Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horní Fránsko – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 1 – Úloha 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Zu der Zeit, als Adam Ries lebte, waren die Preise von Backwaren viele Jahre unverändert. Weil aber das Getreide je nach Ernte unterschiedlich teuer sein konnte, musste das Brotgewicht an den Getreidepreis angepasst werden. Um das Berechnen der Preise zu vereinfachen, gab Adam Ries in seiner „Annaberger Brotordnung“ (1533) Hilfestellung durch Tabellen an.

Damals gab man die Massen der Waren unter anderem mit Pfund, Lot und Quent an.

Es galt: 1 Pfund = 32 Lot, 1 Lot = 4 Quent.

Man bezahlte mit Gulden, Groschen und Pfennigen.

Es galt: 1 Gulden = 21 Groschen, 1 Groschen = 12 Pfennige.

→

Lot	Quent	Teil vom Pfund	Gulden	Groschen	Pfennige
32		1	4	12	0
16		2	2	6	0
8		4	1	3	0
4		8	0	12	0
2		16	0	6	0
1		32	0	3	0
	2	64	?	?	?
	1	128	0	0	9

Adam Ries rechnet die Preise vor, wenn 1 Pfund 4 Gulden und 12 Groschen kostet. Er erklärt die Tabelle für die markierte Spalte beispielhaft so: 8 Lot sind der 4. Teil von einem Pfund, deshalb kosten 8 Lot 1 Gulden und 3 Groschen.

- Untersuche, ob der angegebene Preis von 12 Groschen für 4 Lot korrekt ist.
- Ersetze in der Tabelle die Fragezeichen und gib an, wieviel Groschen und Pfennige 2 Quent kosten.

Mit Hilfe dieser Tabelle kann man den Preis für jede Masse ohne Multiplikation leicht errechnen. Will man beispielsweise den Preis für 9 Lot ermitteln, so zerlegt man die Zahl 9 in die Summanden 8 + 1 und addiert die Preise der 2 Teilmassen.

- Gib den Preis für 15 Lot so an, dass die Anzahlen von Groschen und Pfennigen möglichst klein sind.
- Jemand hat 13 Gulden. Berechne, welche Masse er dafür kaufen kann.

V době, kdy žil Adam Ries, byly ceny pečiva mnoho let neměnné. Protože ale obilí mohlo být různě drahé v závislosti na úrodě, musela být hmotnost chleba přizpůsobována ceně obilí. Aby zjednodušil výpočty cen, uvádí Adam Ries ve svém „Annaberském chlebovém řádě“ (1533) tabulky jako pomůcku k výpočtu.

Tenkrát se hmotnosti zboží udávaly mimo jiné jednotkami libra, lot a kvint.

Platilo, že: 1 libra = 32 lotů, 1 lot = 4 kvint.

Platilo se zlaťáky, groši a feníky.

Platilo, že: 1 zlaťák = 21 grošů, 1 groš = 12 feníků.

→

lot	kvint	zlomek libry	zlaťáky	groše	feníky
32		1	4	12	0
16		2	2	6	0
8		4	1	3	0
4		8	0	12	0
2		16	0	6	0
1		32	0	3	0
	2	64	?	?	?
	1	128	0	0	9

Adam Ries propočítává ceny pro případ, kdy 1 libra stojí 4 zlaťáky a 12 grošů. Pro případ označeného řádku vysvětluje tabulku následovně: 8 lotů je čtvrtina z jedné libry, a proto stojí 8 lotů 1 zlaťák a 3 groše.

- Zjisti, zda uvedená cena 12 grošů za 4 loty je správná.
- Nahraď v tabulce otazníky a uveď, kolik grošů a feníků stojí 2 kvinty.

S pomocí této tabulky se může snadno vypočítat cena pro každou hmotnost bez užití násobení. Chceme-li například zjistit cenu za 9 lotů, rozložíme číslo 9 na sčítance 8 + 1 a sečteme ceny 2 dílčích hmotností.

- Uveď cenu za 15 lotů tak, že počet grošů a feníků bude co možná nejmenší.
- Někdo má 13 zlaťáků. Vypočítej, jakou hmotnost za to může koupit.

21. Vierländerwettbewerb 2014

21. soutěž čtyř zemí 2014



Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horní Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

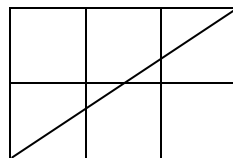
Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

In der nebenstehenden Abbildung sind 3 Quadrate in der Breite und 2 Quadrate in der Höhe angeordnet. Wir nennen eine solche Figur 3 x 2 – Rechteck.

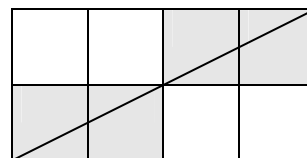
Die eingezeichnete Diagonale (von der linken unteren Ecke zur rechten oberen Ecke) läuft durch das Innere von 4 Quadraten. Wir bezeichnen dies mit $A(3;2) = 4$, d.h. die Anzahl der Quadrate eines 3 x 2 – Rechtecks, durch deren Innere die Diagonale verläuft, beträgt 4.

Verläuft die Diagonale durch einen gemeinsamen Eckpunkt der Teilflächen, so verläuft die Diagonale durch das Innere der grauen Teilflächen, nicht aber durch das Innere der weißen Flächen. Es gilt also $A(4;2) = 4$.



Na vedlejším obrázku jsou uspořádány 3 čtverce na šířku a 2 čtverce na výšku. Takovýto obrazec nazýváme pravouhelník 3 x 2.

Zakreslená úhlopříčka (z levého spodního do pravého horního rohu) prochází vnitřkem 4 čtverců. Označujeme toto jako $A(3;2) = 4$, to znamená, že počet čtverců pravouhelníku 3 x 2, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka, se rovná 4.



Prochází-li úhlopříčka společným rohovým bodem dílčích ploch, tak úhlopříčka protíná vnitřek šedých dílčích ploch, neprotíná ale vnitřek bílých ploch. Platí tedy $A(4;2) = 4$.

- a) Ermittle $A(3;4)$ und $A(7;6)$.
- b) Es sei m eine Zahl größer als 2. Ermittle eine Berechnungsvorschrift für $A(m; m + 1)$.
- c) Zeige, dass es keine Zahl n gibt, so dass $A(2 \cdot n; n) = 13$ gilt.

- a) Zjistí $A(3;4)$ a $A(7;6)$.
- b) Necht' m je číslo větší než 2. Zjistí předpis pro výpočet $A(m; m + 1)$.
- c) Dokaž, že neexistuje žádné číslo n , pro které by platilo $A(2 \cdot n; n) = 13$.

21. Vierländerwettbewerb 2014

21. soutěž čtyř zemí 2014



Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horní Fránsko – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Bei dieser Aufgabe spielen wir gedanklich mit Münzen. Jede Münze hat zwei Seiten. Die Seite, die den Wert der Münze anzeigt, wird mit Zahl (Z) bezeichnet. Die andere Seite wird mit Wappen (W) bezeichnet.

Als Ausgangsposition eines Spiels liegt eine gewisse Anzahl Münzen in einer Reihe nebeneinander. Ein Spielzug besteht darin, zwei direkt nebeneinander liegende Münzen gleichzeitig umzudrehen, so dass statt W danach Z oben liegt bzw. statt Z danach W. Das Spiel kann nach jedem Zug beendet werden.

Auf dem Tisch liegen 3 Münzen nebeneinander. Es ist W – Z – W sichtbar.

- a) Gib eine Folge von Spielzügen an, so dass zum Spielende Z – Z – Z zu sehen ist.
- b) Ist es möglich, dass das Spiel mit W – W – W endet? Begründe deine Antwort

Nun liegen auf dem Tisch 4 Münzen nebeneinander.

- c) Zwei Münzen zeigen mit Z nach oben, die zwei anderen Münzen zeigen mit W nach oben. Untersuche, ob es unabhängig von der konkreten Lage von Z und W stets möglich ist, das Spiel mit W-W-W-W zu beenden?
- d) Nun ist in der Ausgangsstellung nur einmal Z zu sehen und entsprechend dreimal W. Erkläre, warum es nicht möglich ist, einen Spielstand zu erreichen, bei dem viermal W oder viermal Z zu sehen ist.

V této úloze si představme, že si hrajeme s mincemi. Každá mince má dvě strany. Stranu, která označuje číselnou hodnotu mince, značíme písmenem Z. Druhou stranu značíme písmenem W.

Při výchozí pozici hry leží v jedné řadě vedle sebe určitý počet mincí. Jeden herní tah spočívá v tom, že se současně otočí dvě přímo vedle sebe ležící mince tak, že místo W bude poté nahoře Z nebo místo Z bude W. Hra může být po každém tahu ukončena.

Na stole leží vedle sebe 3 mince. Je viditelné W – Z – W.

- a) Uveď postup takových herních tahů, aby na konci hry bylo vidět Z – Z – Z.
- b) Je možné, aby hra končila výsledkem W – W – W? Zdůvodni svou odpověď.

Nyní leží na stole vedle sebe 4 mince.

- c) Dvě mince mají nahoře Z, další dvě mince mají nahoře W. Zjisti, zda je vždy možné, nezávisle na konkrétní poloze Z a W, ukončit hru s výsledkem W-W-W-W?
- d) Nyní je ve výchozí pozici jen jednou viditelné Z a tedy třikrát viditelné W. Vysvětli, proč není možné dosáhnout herního stavu, při kterém by bylo vidět čtyřikrát W nebo čtyřikrát Z.