ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2012

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

Aufgabe 1 – Úloha 1

Aufgabe 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Neben seinen Rechenbüchern hat Adam Ries auch ein großes Mathematikbuch geschrieben, die **Coß**. Darin stellt er eine Aufgabe zu folgendem Problem:

Einer hat ein Fass mit einem bestimmten Fassungsvermögen. Dieses Fass hat zum Entleeren drei Hähne, einen großen, einen mittleren und einen kleinen.

a) Für diese Teilaufgabe nehmen wir an, dass das Fassungsvermögen 300 Liter beträgt und durch den großen Hahn pro Stunde 90 Liter, durch den mittleren 70 und durch den kleinen 40 fließen.

   (1) Nach welcher Zeit wäre das Fass leer, wenn alle Hähne gleichzeitig geöffnet würden?

   (2) Zum Entleeren des Fasses werden nun die Hähne nacheinander unterschiedlich lange, jeder aber das Vielfache einer Stunde (oder gar nicht) geöffnet. Betrachtet wird immer nur die Zeit, in der auch Wasser fließt.

   Untersuche, ob es möglich ist, die Dauer der Öffnung jedes Hahnes eindeutig zu ermitteln, wenn das Fass in weniger als 5 Stunden leer sein soll.

b) Ries stellt in seiner Aufgabe für ein anderes Fass folgende Frage:

   So ich nur den großen Hahn öffne, so läuft es in einer Stunde aus; so ich nur den mittleren Hahn öffne, so läuft es in drei Stunden aus; so ich nur den kleinen Hahn öffne, so läuft es in sechs Stunden aus.
   Nun ist die Frage, nach welcher Zeit ist es ausgelaufen, wenn man alle drei Hähne zugleich öffnet.

   Löse diese Aufgabe.

Úloha 1:

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Mimo svých početnic napsal Adam Ries také jednu velkou knihu o matematice, nazvanou **Coß.** V ní pokládá jednu úlohu k následujícímu problému:

Jeden má sud s určitým objemem. Tento sud má k vyprázdnění tři kohoutky, jeden velký, jeden střední a jeden malý.

a) Pro tuto dílčí úlohu předpokládejme, že objem sudu je 300 litrů a skrz velký kohoutek proteče za hodinu 90, skrz střední 70 a skrz malý 40 litrů.

   (1) Po jaké době by byl sud prázdný, kdyby se otevřely všechny kohoutky najednou?

   (2) K vyprázdnění sudu jsou nyní otevírány kohoutky postupně různě dlouho, každý ale několikanásobek jedné hodiny (nebo vůbec). Bereme v úvahu pouze čas, ve kterém také teče voda.

   Zjisti, zda je možné, dobu otevření každého kohoutku jednoznačně určit, pokud se sud vyprázdnil za méně než 5 hodin.

b) Ries pokládá ve své úloze pro jiný sud následující otázku:
   Pokud otevřu pouze největší kohoutek, vyteče za jednu hodinu. Pokud otevřu pouze střední kohoutek, vyteče za tři hodiny. Pokud otevřu pouze malý kohoutek, vyteče za šest hodin.
   Nyní je otázkou, za jaký čas sud vyteče, otevřou-li se všechny tři kohoutky najednou.

   Vyřeš tuto úlohu.

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2012

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

Aufgabe 2:

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Einheitswürfel (EW) sind Würfel mit einer Seitenlänge von einer Längeneinheit (LE).

Solche Würfel werden so aneinander gefügt, dass je zwei benachbarte Würfel genau ein Einheitsquadrat als gemeinsame Fläche haben.
Durch Zusammenfügen von mehreren solchen Einheitswürfeln entstehen Polywürfel. Bei 2 EW entsteht ein Würfelzwilling.
Bei 3 EW entsteht ein Würfeldrilling usw.
Abb. 1 zeigt eine Auswahl verschiedener Würfeldrillinge und -vierlinge.

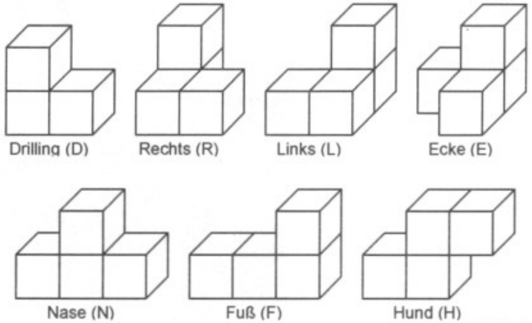


Abb. 1

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Würfelvierlinge an (Zwei Polywürfel heißen voneinander verschieden, wenn sie nicht durch Drehung auseinander hervorgegangen sind).
Begründe!

Abb. 2 zeigt einen Quader aus 4 Würfelvierlingen.
Welcher Würfelvierling ist der schraffierte? Begründe!

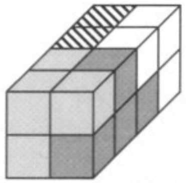


Abb. 2

b) Im Jahr 1936 entwarf der Däne Piet Hein den Somawürfel. Ausgangspunkt seiner Überlegungen waren alle 12 Polywürfel, die sich aus 1, 2, 3 bzw. 4 EW bilden lassen. Aus diesen wählte er die in Abb. 1 dargestellten 7 Polywürfel aus.
Aus diesen 7 Polywürfeln lässt sich ein Würfel aus 27 EW zusammensetzen. Die Schichtbaupläne der Abb. 3 zeigen die Draufsicht der drei Ebenen eines Somawürfels.

N	N	N
F	F	F
F	H	H

untere Ebene

	N	
		L
H	H	L

mittlere Ebene

	L	L

obere Ebene

Abb. 3

Zeichne diese Pläne ab und vervollständige sie, indem du in die freien Felder den jeweiligen Buchstaben des entsprechenden Somateils schreibst.

c) Um Teile des Somawürfels zu verpacken, werden quaderförmige Kartons angefertigt. Der kleinste Karton, um damit ein beliebiges Teil verpacken zu können, hat die Maße $3*2*2$ (Länge * Breite * Höhe). Mit einem Teil wird aber dieser Karton noch nicht vollständig ausgefüllt.

Untersuche, ob in so einen $3*2*2$ - Karton drei verschiedene, beliebig ausgewählte Somawürfelteile passen.

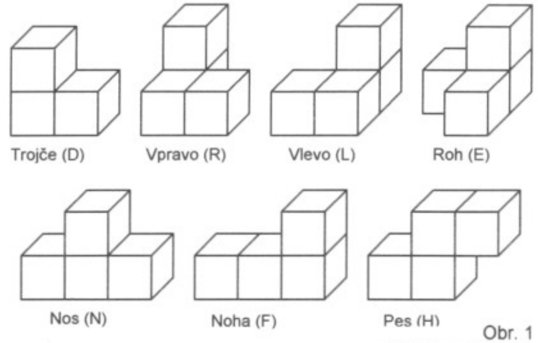
Können vier verschiedene, beliebig ausgewählte Somawürfelteile in einem $x*y*z$ - Karton (außer dem in Aufgabe a) dargestellten) verpackt werden? Begründe!

Úloha 2:

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Jednotkové krychle (JK) jsou krychle o délce strany jedné jednotkové délky (JD).

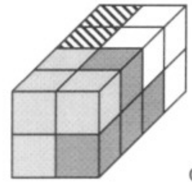
Takové jsou k sobě přikládány tak, že dvě sousední krychle mají jako společnou plochu právě jeden jednotkový čtverec. Skládáním více takových jednotkových krychlí vznikají mnohokrychle: při 2JK dvojče krychlí, při 3 JK trojče krychlí, atd.
Obr. 1 ukazuje výběr různých krychlových trojčat a čtyřčat.



Obr. 1

a) Uveď počet všech různých čtyřčat krychlí (dvě mnohokrychle jsou různé, pokud nevznikly otočením předchozích mnohokrychlí). Zdůvodni!

Obr. 2 ukazuje kvádr ze 4 čtyřčat krychlí. Které čtyřče krychlí je šrafované? Zdůvodni!.


Obr. 2

b) V roce 1936 navrhl Dán Piet Hein „Soma" kostku. Výchozím bodem jeho myšlenek bylo všech 12 mnohokrychlí, které se dají vytvořit z 1, 2, 3 nebo 4 JK. Z nich vybral 7 mnohokrychlí zobrazených na obr. 1.
Těmito 7 mnohokrychlemi se nechá složit kostka z 27 JK. Stavební plány vrstev ukazují pohledy shora na tři roviny kostky.

N	N	N
F	F	F
F	H	H

spodní rovina

	N	
		L
H	H	L

střední rovina

	L	L

horní rovina

Obkresli tyto plány a doplň je tak, že do prázdných polí zapíšeš příslušné písmeno odpovídajícího dílu „Soma" kostky.

c) K zabalení dílů „Soma" kostky se zhotovují krabice kvádrového tvaru. Nejmenší krabice, do které lze zabalit libovolný díl, má rozměry $3-2-2$ (délka – šířka – výška). Jedním dílem se ale krabice zcela nezaplní.

Zjisti, zda se do takové krabice $3-2-2$ vejdou tři různé, libovolně zvolené díly „Soma" kostky.

Mohou být zabaleny čtyři různé libovolně zvolené díly „Soma" kostky v krabici $x-y-z$ (kromě varianty zobrazené v úloze a))?
Zdůvodni!

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2012

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

Aufgabe 3:

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Kennst du die Geschichte von den Heinzelmännchen zu Köln?

Sie kamen jede Nacht in die Häuser und erledigten dort alle am Tag liegen gebliebenen Arbeiten. Niemand hat sie dabei jemals beobachten können. Doch die neugierige Frau des Schneiders wollte sie sehen und streute eines Nachts Erbsen auf die Treppe.
Und so rutschten die Heinzelmännchen aus, fielen hin, glitten die Stufen hinab, ...

3.1 Bei einer Treppe führen von einem Podest aus 10 Stufen nach unten, auf denen viele Erbsen liegen.
Jede Erbse, die auf eine Stufe rollt, setzt auf der nächsten Stufe eine weitere Erbse in Bewegung. Sie bleibt aber auf der übernächsten Stufe liegen, nachdem sie **auch dort** noch eine Erbse in Bewegung gesetzt hat.
Auf der ersten Stufe beginnt der Vorgang mit einer rollenden Erbse.

a) Gib an, wie viele Erbsen auf der 1., 2., und 3. Stufe ankommen.

b) Ermittle, wie viele Erbsen auf der 10. Stufe ankommen.

3.2 Bei einer anderen Treppe schließen führen von einem Podest aus Stufen nach unten, auf denen viele Erbsen liegen.
Jede Erbse, die auf eine Stufe rollt, setzt auf der nächsten Stufe diesmal zwei weitere Erbsen in Bewegung. Sie bleiben aber auf der übernächsten Stufe liegen, **ohne** jedoch dort noch einmal Erbsen in Bewegung zu setzen.
Auf der ersten Stufe beginnt der Vorgang mit einer rollenden Erbse.

c) Ermittle, wie viele Erbsen bei dieser Treppe auf der dritten Stufe ankommen.

d) Auf der letzten Stufe kommen 192 Erbsen an.
Gib an, wie viele Stufen diese Treppe hat.

Úloha 3:

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Znáš pohádku o skřítcích od Kolína?

Přicházeli každou noc do domů a vyřídili tam všechny práce, které se za den nashromáždily. Nikdo je při tom nikdy nezpozoroval. Ale zvědavá žena krejčího je chtěla vidět a jedné noci nasypala hrách na schody.
A tak skřítkové uklouzli, upadli, sklouzli po schodech dolů,...

3.1 U jednoho schodiště navazuje na odpočívadlo 10 schodů, na kterých leží hodně hrášku.
Každý hrášek, který se skutálí na jeden schod, dá na dalším schodě do pohybu další hrášek. Na přespříštím schodě ale zůstane ležet, poté co i tam uvedl do pohybu ještě jeden hrášek.
Na prvním schodě začíná proces s jedním kutálejícím se hráškem.

a) Uveď, kolik hrášků dorazí na 1., 2., a 3. schod.

b) Zjisti, kolik hrášků dorazí na 10. schod.

3.2 U jiného schodiště navazují opět na odpočívadlo schody, na kterých leží mnoho hrášků.
Každý hrášek, který se skutálí na jeden schod, dá na dalším schodě do pohybu tentokrát dva další hrášky. Ty ale zůstanou ležet na přespříštím schodě, bez toho aby tam ještě jednou daly hrášky do pohybu.
Na prvním schodě začíná proces s jedním kutálejícím se hráškem.

c) Zjisti, kolik hrášků u tohoto schodiště dopadne na třetí schod.

d) Na poslední schod dorazí 192 hrášků.
Uveď, kolik schodů má toto schodiště.