ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2011

Oberfranken - Horni Franky
Sachsen– Sasko
Thüringen - Durynsko
Tschechien- Česká republika

Aufgabe 1 - Ùloha 1

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 1

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

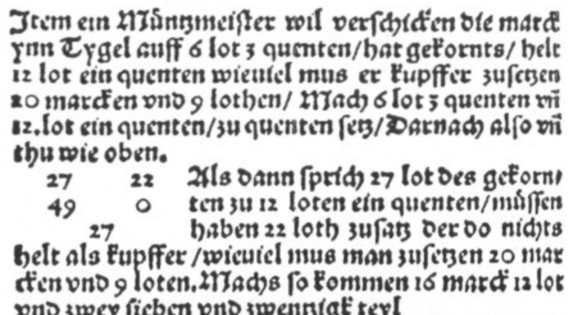
Unter der Überschrift „Beschickung des Schmelztiegels“ stellt ADAM RIES im zweiten Rechenbuch einige Aufgaben zu Silbermischungen. Jede Mischung enthält einen Anteil von reinem Silber und einen Restanteil anderer Stoffe, z.B. Kupfer.

Zurzeit, als Adam Ries lebte, gab es zur Angabe der Masse nicht die bei uns jetzt üblichen Einheiten Kilogramm und Gramm, sondern die Kramergewichte **Mark**, **Lot** und **Quent**. Ries benutzte in seinem Rechenbuch folgende Umwandlungen:

1 Mark = 16 Lot, 1 Lot = 4 Quent.

Folgende Abkürzungen wurden von ihm verwendet:

Mark mk, Lot lt, Quent q.


Item ein Müntzmeister wil verschicken die marck ynn Tygel auff 6 lot 3 quenten/hat gekornts/ helt 12 lot ein quenten wieuiel mus er kupffer zusetzen 20 marcken vnd 9 lothen/ Mach 6 lot 3 quenten vñ 12. lot ein quenten/zu quenten setz/Darnach also vñ thu wie oben.

27 22 Als dann sprich 27 lot des gekorn-
49 0 ten zu 12 loten ein quenten/müssen
27 haben 22 loth zusatz der do nichts

helt als kupffer /wieuiel mus man zusetzen 20 marcken vnd 9 loten. Machs so kommen 16 marck 12 lot vnd zwey sieben vnd zwentzigk teyl

Ein Münzmeister hat 26 mk einer Silbermischung mit einem Anteil an reinem Silber von 20 mk und 5 lt.

a) Berechne, wie hoch der Anteil des reinen Silbers in einem Mark dieser Mischung ist. Gib das Ergebnis in Lot und Quent an.

b) Der Münzmeister verschmilzt diese Mischung mit 2 mk reinem Silber.

   Ermittle, wie hoch der Anteil des reinen Silbers in einem Mark der Schmelze nun ist.

c) In einer Aufgabe von Ries (die Abb. zeigt diese Aufgabe im Original mit geänderten Zahlen) möchte der Münzmeister durch Verschmelzen mit Kupfer den Anteil des reinen Silbers je Mark dieser neuen Mischung auf 6 lt und 2 q verringern.

   Ermittle, wie viel Kupfer er den 26 mk der ursprünglichen Silbermischung zusetzen muss.

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 1)
Úloha 1

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně pomocných výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny odpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Pod názvem „Zavážení tavicí nádoby“ předkládá Adam Ries ve své druhé početnici několik úloh o slitinách stříbra.
Každá slitina obsahuje jeden díl ryzího stříbra a zbytek slitiny tvoří jiné látky, např. měď.

V době, kdy žil Adam Ries, neudávala se hmotnost v nyní užívaných jednotkách kilogram a gram, nýbrž v kupeckých jednotkách **mark**, **lot** a **cent**.

Ries použil ve své početnici následující převody:

1 mark = 16 lotů, 1 lot = 4 centy.

Používal následující zkratky:

mark=mk, lot=lt, cent=q.

Razič mincí (mincmistr) má 26 mk stříbrné slitiny, přičemž podíl ryzího stříbra v tomto množství slitiny činí 20 mk a 5 lt.

a) Vypočítej, jaká je hmotnost podílu ryzího stříbra v jednom marku této slitiny.
   Uveď výsledek v lotech a quentech.

b) Mincmistr roztaví tuto slitinu ze zadání (26 mk) a přidá k ní další 2 mk ryzího stříbra.
   Zjisti, jak vysoký je nyní podíl ryzího stříbra v jednom marku této taveniny.

c) V jedné Riesově úloze (obr. vpravo ukazuje originál této úlohy s pozměněnými čísly) by chtěl mincmistr roztavením s mědí snížit podíl ryzího stříbra pro každý mark této nové slitiny na 6 lt a 2q.

   Zjisti kolik mědi musí přidat k původním 26 mk původní stříbrné slitiny.

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2011

Oberfranken - Horni Franky
Sachsen– Sasko
Thüringen - Durynsko
Tschechien- Česká republika

Aufgabe 2 - Ùloha 2

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 2

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Und noch einmal geht es um sonderbare Eigenschaften natürlicher Zahlen.

Ist eine natürliche Zahl n ohne Rest durch eine von n verschiedene natürliche Zahl t teilbar, so nennt man t einen **echten Teiler** von n. So sind z.B. die Zahlen 1, 2 und 5 alle echten Teiler von 10.

a) Ermittle alle echten Teiler von 16.

Gib eine Zahl an, von der nur die Zahlen 1, 2, 4, 5 und 10 echte Teiler sind.

Eine Zahl, bei der die Summe aller echten Teiler gleich dieser Zahl selbst ist, heißt **vollkommene** Zahl.

b) Begründe, dass 28 eine vollkommene Zahl ist.

Untersuche, ob es einstellige Zahlen gibt, die vollkommen sind.

Eine Zahl, bei der die Summe aller echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist, heißt **defiziente** Zahl.

c) Weise nach, dass 8 eine defiziente Zahl ist.

Gib eine zweistellige Zahl an, die keine defiziente Zahl ist. Begründe!

d) Tom, der sich mit solchen Zahlen beschäftigt, stellt folgende Vermutungen auf:

V_1 : Alle Primzahlen sind defiziente Zahlen.

V_2 : Das Vielfache einer defizienten Zahl ist wieder eine defiziente Zahl.

Gib den Wahrheitswert der Aussagen an. Begründe!

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 1)
Úloha 2

Poznámka: Postup řešení (včetně pomocných výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny odpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

A ještě jednou půjde o zvláštní vlastnosti přirozených čísel.

Je-li přirozené číslo n dělitelné beze zbytku od n různým přirozeným číslem t (t je různé od n), nazýváme číslo t **kladným dělitelem** n. Tak jsou např. čísla 1, 2 a 5 všechna kladnými děliteli čísla 10.

a) Zjisti všechny kladné dělitele čísla 16

Uveď číslo, pro které jsou jen čísla 1, 2, 4, 5 a 10 kladnými děliteli.

Číslo, které se rovná součtu všech svých kladných dělitelů, se nazývá **dokonalé** číslo.

b) Dokaž, že 28 je dokonalé číslo.

Zjisti, zda existují jednociferná čísla, která jsou dokonalá.

Číslo, u kterého je součet všech kladných dělitelů menší než číslo samotné, se jmenuje **deficientní** číslo.

c) Dokaž, že číslo 8 je deficientní číslo.

Uveď dvojciferné číslo, které není deficientním číslem. Zdůvodni!

d) Tom, který se o taková čísla zajímá, uvádí následující domněnky:

d_1: Všechna prvočísla jsou deficientní čísla.

d_2: Celočíselný násobek deficientního čísla je opět číslo deficientní.

Uveď pravdivost tvrzení. Zdůvodni!

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2011

Oberfranken - Horni Franky
Sachsen– Sasko
Thüringen - Durynsko
Tschechien- Česká republika

Aufgabe 3 - Ùloha 3

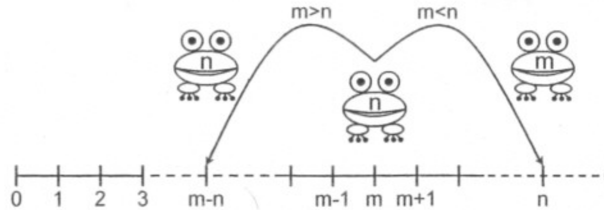
ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 3

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Es gibt merkwürdige Tiere!

Wusstest du schon, dass es unter den vielen Arten von Fröschen auch (n,m) – Frösche $(n,m \in N)$ gibt?

Ein (n,m) – Frosch ist ein Frosch, der auf der Zahl m eines Zahlenstrahls sitzt und sich folgendermaßen bewegt:



Ist **m>n**, so macht der Frosch einen Sprung um n Einheiten nach links und landet folglich auf der Zahl $m-n$ und ist folglich ein $(n,m-n)$ – Frosch.

Ist **m<n**, springt der (n,m) – Frosch auf die Zahl n des Zahlenstrahls und wird zu einem (m,n) – Frosch (vgl. Abb.).

Diese Vorgehensweise wiederholt sich so oft, bis schließlich m=n gilt. Dann ist der Frosch glücklich und bleibt auf dieser Endzahl sitzen.

a) Ein $(12,39)$ – Frosch, der zu Beginn folglich auf der Zahl 39 sitzt, legt in den ersten vier Sprüngen folgenden Weg zurück:

Anzahl der Sprünge	0	1	2	3	4				
Bedingung	m>n	m>n	m>n	m<n	m>n				
n	12	12	12	12	3				
m	39	27	15	3	12				

Vervollständige den Weg dieses Frosches, bis er auf einer Endzahl sitzen bleibt.

b) Beschreibe den Weg eines $(37,11)$ – Frosches, bis er auf einer Endzahl sitzen bleibt und gib an, nach dem wievielten Sprung und auf welcher Endzahl er sitzen bleibt.

c) Begründe, dass ein $(3,27)$ – Frosch nur nach links springt.
Gib die Endzahl an, auf der er schließlich sitzen bleibt.

d) Gib eine Zahl m an, von der ein $(16,m)$ – Frosch starten muss, damit er auf der Endzahl 4 sitzen bleibt.

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 1)
Úloha 3

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně pomocných výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny odpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Podivná zvířata existují!

Věděli jste, že jsou mezi četnými druhy žab také (n,m) – žáby $(n,m \in N)$?

Jedna (n,m) – žába je žába, která sedí na čísle m číselné osy a pohybuje se následovně:

Je-li **m>n**, udělá žába skok o n jednotek doleva a přistane následně na čísle $m-n$ a stane se $(n,m-n)$ – žábou.

Je-li **m<n**, skočí (n,m) – žába na číslo n číselné osy a stane se (m,n) – žábou (viz. obr.).

Tento postup se opakuje tolikrát, až nakonec bude platit m = n. Pak je žába šťastná a zůstane na tomto konečném čísle sedět.

a) Jedna $(12,39)$ – žába, která tedy na začátku sedí na čísle 39, urazí v prvních čtyřech skocích následující cestu:

Počet skoků	0	1	2	3	4				-
Podmínka	m>n	m>n	m>n	m<n	m>n				
n	12	12	12	12	3				
m	39	27	15	3	12				

Zapiš další skoky této žáby, dokud nezůstane sedět na konečném čísle.

b) Popiš cestu $(37,11)$ – žáby, dokud nezůstane sedět na konečném čísle a uveď po kolika skocích a na kterém konečném čísle zůstane sedět.

c) Zdůvodni, že jedna $(3,27)$ – žába skáče pouze doleva.
Uveď konečné číslo, na kterém nakonec zůstane sedět.

d) Uveď číslo m, z kterého musí startovat $(16,m)$ – žába, aby zůstala sedět na konečném čísle 4.