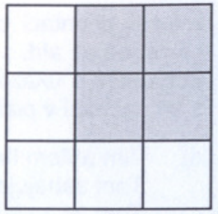
Úloha 3: n-čtvercová plocha s délkou strany n je kompletně složena z jednotkových čtverců (čtverce o délce strany 1).

Na takovéto ploše mají být poznány všechny čtverce, které jsou složeny z určitého počtu jednotkových čtverců.

a) Zobrazení 1 ukazuje takovou 3-čtvercovou plochu s takovýmto označeným čtvercem ze čtyř jednotkových čtverců.

Ukaž, že jde na této ploše poznat 14 čtverců.



Zobrazení 1

b) Zjisti počet čtverců, které jdou poznat v 5-čtvercové ploše.

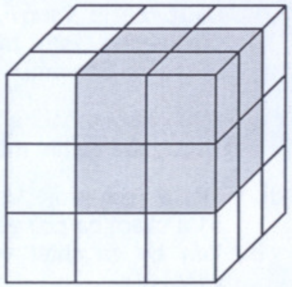
Popiš možnost, jak jde vypočítat počet všech čtverců 9-čtvercové plochy a uveď ji.

Uvažujeme nyní tuto problematiku v prostoru. n-krychle s délkou hrany n je kompletně tvořena jednotkovými krychlemi (krychle o délce hrany 1).

V takovéto krychli mají být poznány všechny krychle (i uvnitř ležící), které jsou tvořeny určitým počtem jednotkových krychlí.

c) Zobrazení 2 ukazuje 3-krychli s označenou krychlí složenou z osmi jednotkových krychlí.

V jiné takové n-krychli můžeme poznat 100 krychlí.



Zobrazení. 2

Uveď, jakou délku hrany má tato n-krychle. Zdůvodni!

MATEMATICKÁ SOUTĚŽ ADAM RIES

HORNI FRANKY – SASKO – DURYNSKO – ČESKÁ REPUBLIKA

2009

Matematická soutěž ADAM RIES 2009 - 3. stupeň

Úlohy - část 1

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Úloha 1: Když si někdo půjčí na určitý čas peněžní částku, tak za to musí půjčovateli na oplátku platit úrok. Celkový úrok je o to vyšší, čím vyšší je půjčená peněžní částka a čím déle máme peníze půjčené.

ADAM RIES pokládá ve své druhé početnici pod nadpisem „Od lichváře" takovouto úlohu, ve které kriticky poukazuje na tyto úrokové praktiky.

V tehdejší době se platilo například s guldeny a feniky. Použijeme následující zkratky: gulden fl; fenik pf. Pro přepočet platí: 1 fl = 252 pf.

a) Někdo si půjčí 20 guldenů na 2 roky a musí každý měsíc půjčovateli platit úrok 8 feniků za každý gulden, který si půjčil.

Spočítej, kolik činí celkový úrok. Uveď úrok v guldenech a fenikách.

b) Jiný si půjčí určitou peněžní částku na 3 roky a musí každý měsíc půjčovateli platit úrok 4 feniky za každý gulden, který si půjčil.
Celkově zaplatí úrok 20 guldenů.

Spočítej, jakou peněžní částku si půjčil.

c) Adam Ries pokládá následující úlohu (originální text na zobrazení vedle), která by v dnes používaném jazyce zněla takto (čísla změněna):

„Směnář půjčuje muži po dobu 1 roku 10 guldenů, a **po půl roce připočte dosavadní úrok k půjčené peněžní částce.** Muž tedy musí splácet na úrok prvního pololetí v druhém pololetí také úrok.

Nyní se ptám, jaký úrok se musí splatit v uvedeném roce za 10 guldenů, když se měsíčně dá za jeden gulden 7 feniků."

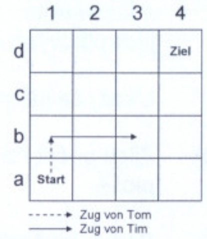

Jtem ein Jud leihet
einem 20. fl. vier Jar/
vnnd alle halbe Jar re-
chent er den gewinn zum
hauptgut/ Nun frag ich/
wie viel die 20. fl. ange-
zeigte 4. Jar bringen mö-
gen/ so alle Wochen 2. dr.
von einem fl. gegeben
werden? Facit gewinn/
vnd gewinns gewinn/ rc.

Vyřeš tuto úlohu.

Úloha 2: A znovu jde o strategickou hru, ve které si hráč vhodným postupem nezávisle na vedení hry svého protivníka může vynutit vítězství.

Ve hře „Vpravo a nahoru" se využívá pravoúhlá mřížka *n x m* z n vodorovných řádků a m svislých sloupců. Dva hráči pohybují střídavě jednou a tou samou mincí od startu začínaje buď libovolný počet polí vpravo, nebo nahoru. Vítěz je ten, kdo dostane první minci do cíle.

K lepší orientaci označujeme řádky malými písmeny, sloupce čísly a pole následně a1 atd.
Zobrazení 1 ukazuje takovou *4 x 4* mřížku, ve které se start nachází v poli a1 a cíl v poli d4.



Zobrazení 1

a) Tim a Tom hrají ve čtvercové mřížce zobrazení 1. Tom zahajuje tahem na b1, Tim následuje na b3. Tom si uvědomuje: „Ze tří možných polí, která nyní mohu hrát, mi právě jedno zajistí vítězství".

Zdůvodni, že výpověď Toma je pravdivá a zadej vítězné pole, které mu zajistí vítězství.

b) Tim a Tom hrají nyní stejnou hru na mřížce 9 x 9 se startem na poli a1 a cílem na poli i9. Tom znovu zahajuje.

Ukaž, že je Timovi možno v každém tahu vynutit vítězství. Zadej do pracovního listu takový herní postup. Označ tahy Tima a Toma odlišnými barvami.

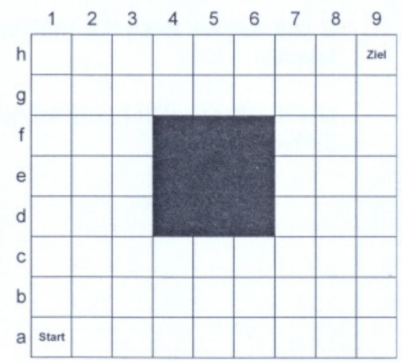
c) Nyní je pozměněna hra úlohy b tak, že se start posouvá na pole a2. Uveď, zda se tím mění možnosti vítězství Tima. Zdůvodni!

d) Tim a Tom hrají „Vpravo a nahoru" na mřížce *5 x 9* se startem na poli a1 a cílem na poli e9.
Tim by si chtěl vynutit vítězství v této hře.

Uveď, kdo musí hru zahájit. Zdůvodni!

e) Oba prohlédli vítěznou strategii. Nyní už hra není zábavná. Poznají ale, že hra se stane zase zajímavou, když se na nějaká pole mřížky nesmí pokládat.

Vytvoří mřížku *8 x 9* zobrazení 2, ve které se nesmí pokládat na označená pole.



Zobrazení 2

Popiš jednu vítěznou strategii, která umožní vynutit vítězství.

Aufgabe 3: Eine n-Quadratfläche mit der Seitenlänge n ist vollständig aus Einheitsquadraten (Quadrate mit einer Seitenlänge von 1) zusammengesetzt.

Es sollen in einer solchen Fläche alle Quadrate erkannt werden, die aus einer bestimmten Anzahl von Einheitsquadraten bestehen.

a) Abb. 1 zeigt eine solche 3-Quadratfläche mit einem solchen markierten Quadrat aus 4 Einheitsquadraten.

Zeige, dass man in dieser Fläche 14 Quadrate erkennen kann.

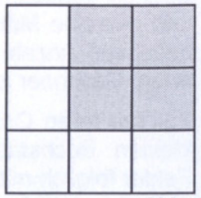


Abb. 1

b) Ermittle die Anzahl der Quadrate, die man in einer 5-Quadratfläche erkennen kann.

Beschreibe eine Möglichkeit, wie man die Anzahl aller Quadrate einer 9-Quadratfläche berechnen kann und gib diese an.

Wir betrachten nun diese Problemstellung im Raum. Ein n-Würfel mit der Kantenlänge von n ist vollständig aus Einheitswürfeln (Würfel mit einer Kantenlänge von 1) zusammengesetzt.

Es sollen in einem solchen Würfel alle (auch innen liegenden) Würfel erkannt werden, die aus einer bestimmten Anzahl von Einheitswürfeln bestehen.

c) Abb. 2 zeigt einen 3-Würfel mit einem markierten Würfel aus 8 Einheitswürfeln.

In einem anderen solchen n-Würfel kann man 100 Würfel erkennen.

Gib an, welche Kantenlänge dieser n-Würfel hat. Begründe!

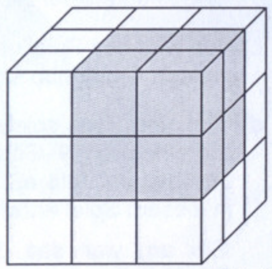


Abb. 2

ADAM-RIES-WETTBEWERB

OBERFRANKEN-SACHSEN-THÜRINGEN-TSCHECHIEN

2009

A D A M - R I E S - W E T T B E W E R B 2 0 0 9 - 3.Stufe

A U F G A B E N - Teil 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1: Wenn sich Jemand für eine bestimmte Zeit einen Geldbetrag leiht, so muss er dem Verleiher dafür als Gegenleistung ein Entgelt bezahlen, auch Zinsen genannt. Die Gesamtzinsen sind umso größer, je höher der geliehene Geldbetrag ist und je länger man das Geld leiht.

ADAM RIES stellt in seinem zweiten Rechenbuch unter der Überschrift „Vom Wucher" eine solche Aufgabe, in der er auch kritisch diese Zinspraktik hinterfragt.

Zur damaligen Zeit bezahlte man z.B. mit Gulden und Pfennigen. Wir verwenden folgende Abkürzungen: Gulden fl; Pfennig pf. Für die Umrechnung gilt: 1 fl = 252 pf.

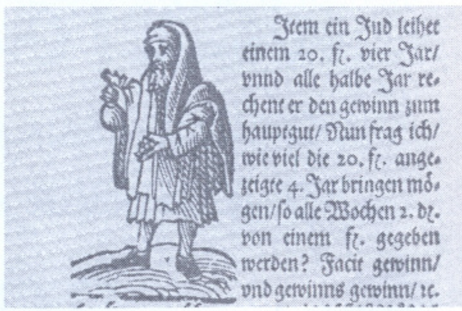
a) Jemand leiht sich 20 Gulden für 2 Jahre und muss jeden Monat dem Verleiher 8 Pfennig Zins für einen geliehenen Gulden zahlen.

   Berechne, wie viel Zinsen insgesamt zu zahlen sind. Gib die Zinsen in Gulden und Pfennigen an.

b) Ein Anderer leiht sich einen bestimmten Geldbetrag für 3 Jahre und muss jeden Monat dem Verleiher für einen geliehenen Gulden 4 Pfennig Zinsen zahlen. Insgesamt zahlt er 20 Gulden Zinsen.

   Berechne, welchen Geldbetrag er sich geliehen hat.

c) Adam Ries stellt folgende Aufgabe (Originaltext in nebenstehender Abb.), die in unserem heutigen Sprachgebrauch folgendermaßen lauten würde (Zahlen geändert):


Jtem ein Jud leihet
einem 20. fl. vier Jar/
vnnd alle halbe Jar re-
chent er den gewinn zum
hauptgut/ Nun frag ich/
wie viel die 20. fl. ange-
zeigte 4. Jar bringen mö-
gen/ so alle Wochen 2. dz.
von einem fl. gegeben
werden? Facit gewinn/
vnd gewinns gewinn/ rc.

   „Ein Geldwechsler leiht einem Mann ein Jahr lang 10 Gulden, und **nach einem halben Jahr rechnet er den bisherigen Zins zum geliehenen Geldbetrag zu.** Der Mann muss also auf die Zinsen des ersten halben Jahres im kommenden Halbjahr auch Zinsen bezahlen.

   Nun frage ich, wie viel für die 10 Gulden in dem angegebenen Jahr Zinsen gezahlt werden müssen, wenn jeden Monat 7 Pfennig für einen Gulden gegeben werden."

   Löse diese Aufgabe.

Aufgabe 2: Und wieder geht es um ein Strategiespiel, in dem durch eine geeignete Vorgehensweise ein Spieler unabhängig von der Spielführung seines Gegners den Sieg erzwingen kann.

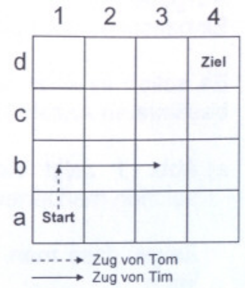


Abb. 1

Im Spiel „Rechts und Hoch" wird ein rechteckiges *n x m* - Gitter aus n waagerechten Zeilen und m senkrechten Spalten genutzt. Zwei Spieler bewegen abwechselnd ein und dieselbe Münze vom Start beginnend entweder eine beliebige Anzahl von Feldern nach rechts, oder nach oben. Gewinner ist, wer die Münze ins Ziel bringt.

Zur besseren Orientierung bezeichnen wir die Zeilen mit kleinen Buchstaben, die Spalten mit Zahlen und die Felder folglich mit a1 und so weiter.
Abb. 1 zeigt ein solches *4 x 4* - Gitter, bei dem sich der Start im Feld a1 und das Ziel im Feld d4 befinden.

a) Tim und Tom spielen in dem Quadratgitter der Abb.1. Tom beginnt mit dem Zug nach b1, Tim schließt b3 an. Tom bemerkt nun: „Von den drei möglichen Feldern, die ich jetzt ziehen kann, sichert mir genau eins den Sieg".

   Begründe, dass die Aussage von Tom wahr ist und gib das Gewinnfeld an, das ihm den Sieg sichert.

b) Tim und Tom spielen nun das gleiche Spiel auf einem *9 x 9* - Gitter mit Start im Feld a1 und Ziel im Feld i9. Tom beginnt wieder.

   Zeige, dass es Tim in jedem Zug möglich ist, den Sieg erzwingen. Gib eine solchen Spielverlauf auf dem Arbeitsblatt an. Markiere die Züge von Tim und Tom in unterschiedlichen Farben.

c) Nun wird das Spiel der Aufgabe b variiert, indem man den Start auf das Feld a2 verlegt. Gib an, ob sich damit die Gewinnmöglichkeit für Tim ändert. Begründe!

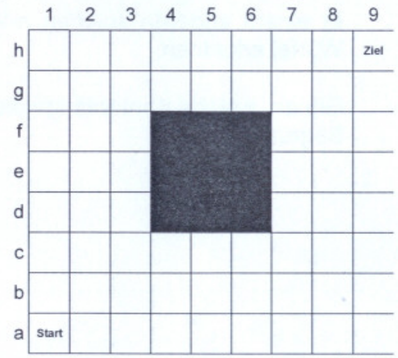


Abb. 2

d) Tim und Tom spielen „Rechts und Hoch" auf einem *5 x 9* -Gitter mit Start im Feld a1 und Ziel im Feld e9. Tim möchte den Sieg in diesem Spiel erzwingen.

   Gib an, wer das Spiel beginnen muss. Begründe!

e) Beide haben die Gewinnstrategie durchschaut. Nun macht es keinen Spaß mehr. Sie erkennen aber, dass es wieder interessant wird, wenn man auf einige Felder des Gitters nicht setzen darf.

   Sie stellen das *8 x 9* - Gitter der Abb. 2 her, in dem man auf die markierten Felder nicht setzen darf.

   Beschreibe eine Gewinnstrategie, die es ermöglicht, den Sieg zu erzwingen.