Matematická soutěž Adam Ries

Horní Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Podkrušnohorské gymnázium, Most
27. – 28. března 2019

Ústecký kraj

Hospodářská komora České republiky
OHK Most

MOST
Statutární město

Matematická soutěž Adama Riese 2019 – 2. kolo

Poznámka: Uvádějte celé postupy řešení včetně všech pomocných výpočtů. Všechna svá tvrzení formulujte přesně a nezapomeňte na zdůvodnění, pokud je vyžadováno.

Příklad 1

V dobách, ve kterých žil Adam Ries, se platilo guldeny, groši a feniky. Jeden gulden byl 21 grošů, jeden groš byl 12 feniků. Jednotkou množství tekutin byl například džber.

Na obrázku vpravo můžete vidět originál jedné takové úlohy z druhé sbírky příkladů Adama Riese. Přeložena do současného jazyka by zněla takto: Když prodám 37 džberů vína a jeden džber vína bude stát 17 grošů, kolik peněz celkem utržím? Výsledek: 29 guldenů a 20 grošů.

Adam Risen. 18

Item ich verkauff 37. Eymer Weins/ vnd geb ein Eymer für 17. groschen.

Facit 29. fl. 20. gro.

Vyřeš následující úlohy.

a) 32 džberů určitého druhu vína stálo 2 guldeny a 14 grošů. Kolik stálo 13 džberů tohoto vína? Výsledek uveď tak, aby počet mincí byl co možná nejmenší.

b) 24 džberů jiného druhu vína stálo 3 guldeny a 12 grošů. Kolik stálo 10 džberů tohoto vína? Výsledek uveď tak, aby počet mincí byl co možná nejmenší.

c) Na trhu prodávali drahé víno (15 džberů stálo 1 gulden a 14 grošů) a levné víno (18 džberů stálo 1 gulden a 4 groše). Jeden sedlák chtěl koupit 10 plných džberů vína tak, aby za ně utratil nejvýše 1 gulden a aby současně z těch 10 bylo co nejvíce džberů drahého vína. Kolik džberů z 10 koupených bylo drahého vína a kolik levného vína?

Příklad 2

Budeme skládat za sebe řadu celých čísel, podobně jako slavný matematik Leonardo Fibonacci, který se takovými řadami čísel zabýval už kolem roku 1200. Začal tak, že naspal za sebe 1 a 1. Tyto sečetl a výsledek zapsal jako další číslo, měl tedy 1, 1, 2. Potom sečetl dvě poslední čísla (1 + 2) a výsledek opět zapsal do řady svých čísel: 1, 1, 2, 3. A takto pokračoval dále.

Je dobře možně, že synové Adama Riese (Adam, Abraham, Jakob, Izák a Paul) takové řady vytvářeli.

a) Abraham začal svou řadu stejně jako Fibonacci s čísly 1 a 1 (toto byli první a druhý člen jeho řady). Pokračoval stejně jako Fibonacci až k devátému členu a dostal číslo 34. Ověř, jestli Abraham počítal správně a vypiš všechny členy této řady až k devátému členu.

b) Paul tvrdí, že může dostat číslo 34 jako osmý člen své řady, kterou počítá stejným způsobem, jen musí číslo 1, které je druhým členem řady, nahradit jiným. Má Paul pravdu? Které číslo by musel napsat jako druhý člen této řady?

c) Jakob tvrdí, že umí zvolit první dva členy řady tak, že dostane číslo 34 už jako pátý člen řady. Má pravdu? S jakými čísly musí začít řadu? Uveď příklad a proveď zkoušku.

d) Adam dlouho přemýšlel o Jakobově tvrzení a došel k závěru, že existují různá řešení tohoto příkladu. Najdi všechny dvojice čísel, která splňují Jakobovo tvrzení.

Příklad 3

Tři dcery Adama Riese (Eva, Anna a Sibyla) hrají rády domino. K této hře je zapotřebí 28 kamenů, na kterých jsou uvedeny všechny možné kombinace dvou čísel od nuly do šestky. Tak jako je tomu na obrázku.

0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6
	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
		2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
			3 3	3 4	3 5	3 6
				4 4	4 5	4 6
					5 5	5 6
						6 6

Když budeme popisovat konkrétní domino kámen, napíšeme zkráceně číslice na kameni, například 1-2. Všimni si, že v takovém případě máme k dispozici jediný kámen. Znamená to i to, že zápisy 1-2 a 2-1 znamenají stejný kámen. Když budeme mluvit o součtu kamene, máme na mysli součet dvou čísel, která na tomto kameni jsou. Součet kamene 1-2 je tedy 1+2=3.

a) Které kameny domina mají svůj součet roven 7?

b) Anna a Eva odebraly z hromady kamenů každá jeden kámen bez toho, aby jej vrátily zpět. Které kameny může odebrat Anna, aby platilo, že Eva nemůže odebrat kámen se stejným součtem?

c) Každé ze tří děvčat odebralo z hromady všech domino kamenů právě jeden kámen a nevrátilo ho zpět. Pak překvapeně zjistily, že součet na Evině kameni je dvojnásobný proti součtu na kameni Anny a současně je součet na kameni Anny dvojnásobný proti součtu na kameni Sibyly. Kolik je různých možností kombinací kamenů, které splňují tyto podmínky?

Příklad 4

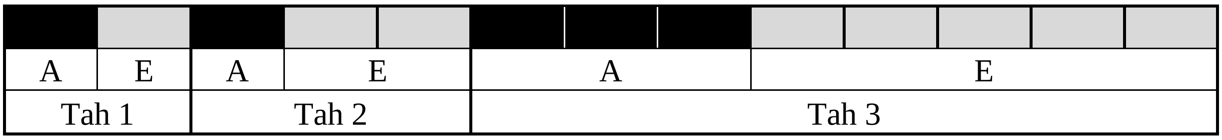
Abraham (A) a Eva (E) spolu hrají následující hru. Mají dlouhý pruh s políčky, která jsou namalovaná za sebou v jedné řadě.

V prvním tahu smí Abraham začít od levého kraje tak, že černě zabarví jedno nebo více políček. Následně musí Eva ve svém prvním tahu šedě zabarvit stejné množství políček, jaké černě zabarvil Abraham.

Následující tahy probíhají takto: Abraham ve svém tahu začerní právě tolik políček, kolik dosud Eva obarvila šedě a Eva ve svém tahu obarví šedě tolik políček, kolik dosud Abraham začernil.

Takto se střídají a vyhrává ten, který dříve svou barvou označí alespoň 100 políček.

Když Abraham ve svém prvním tahu obarví jedno políčko, vypadají první tři tah hry následovně:



Průběh hry můžeme zapsat i pomocí tabulky (texty v závorkách v tabulce jsou jen vysvětlivky a psát je nemusíte):

Tah	Hráč	Dosud zabarvil	V novém tahu zabarví	Celkem zabarvil
1	A	0	1 (Start)	0 + 1 = 1
	E	0	1 (stejně jako A v prvním tahu)	0 + 1 = 1
2	A	1 (po prvním tahu)	1 (stejně jako E celkem v 1. tahu)	1 + 1 = 2
	E	1 (po prvním tahu)	2 (jako A celkem ve dvou tazích)	1 + 2 = 3
3	A	2 (po druhém tahu)	3 (jako E celkem ve dvou tazích)	2 + 3 = 5
	E	3 (po druhém tahu)	5 (jako A celkem ve třech tazích)	3 + 5 = 8

a) Abraham na začátku obarví jedno políčko a hra začne stejně jako v předchozí tabulce a je zklamaný, protože Eva vyhrála. Zapiš průběh hry a vyznač tah, ve kterém Eva vyhrála.

b) Abraham by ale také rád vyhrál a zahájí tedy hru s jiným počtem obarvených políček než jedním. Jaký je nejmenší počet políček, které musí v prvním tahu obarvit, aby vyhrál?

c) Najdi největší číslo, které je zároveň menší než 20, s kterým musí Abraham začít, aby vyhrál.

Řešení:

Příklad 1

a) Jsou k dispozici různé výpočetní postupy. Jeden z nich může být: 32 džberů určitého druhu vína stálo 2 guldeny a 14 grošů. Kolik stálo 13 džberů tohoto vína? 2 guldeny = 42 grošů. 42 + 14 grošů = 56 grošů. 56 grošů = 672 feniků je cena 32 džberů. Jeden džber je 672 : 32 = 21 feniků. 13 džberů = 21 * 13 = 273 feniků = 22 grošů 9 feniků = **1 gulden 1 groš 9 feniků**.

b) 24 džberů jiného druhu vína stálo 3 guldeny a 12 grošů. Kolik stálo 10 džberů tohoto vína? 3 guldeny = 63 grošů. 63 + 12 = 75 grošů = 900 feniků. 900 : 24 = 37,5 feniku. 10 džberů = 375 feniků = 31 grošů 3 feniky = **1 gulden 10 grošů 3 feniky.** Alternativní řešení by bylo např. z ceny 24 džberů vypočítat cenu 8 džberů a 2 džberů a tyto sečíst.

c) Drahé víno stojí 15 džberů 1 gulden a 14 grošů, tj. 35 grošů. Z toho plyne, že 3 džbery stojí 7 grošů a tedy 9 džberů stojí 21 grošů = 1 gulden. Za jeden gulden je možno koupit 9 džberů drahého vína, ale už mu nezbydou žádné peníze na desátý džber. A levné víno stojí 18 džberů 1 gulden a 4 groše, tj. 25 grošů. 90 džberů levného vína stojí 5*25 = 125 grošů. 45 džberů drahého vína stojí 3*35 = 105 grošů. Z toho plyne, že dva džbery levného vína jsou dražší než jeden džber drahého vína. Není tedy možné koupit 8 džberů drahého a 2 džbery levného vína, protože stojí více než 1 gulden. 60 džberů levného vína stojí 4*35 = 140 grošů. Protože 90 džberů levného vína stojí méně než 60 džberů drahého vína, stojí také 3 džbery levného vína méně než 2 džbery drahého vína. Je tedy za jeden gulden možné koupit **7 džberů drahého a 3 džbery levného vína**.

Příklad 2

a) 1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, 8+13=21, 13+21=34. Devátý člen je opravdu 34.

b) Paul umístí na druhé místo řady číslo 2, potom se hodnoty součtů o jednu posunou: 1, 2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, 8+13=21, 13+21=34. A tedy osmý člen je 34.

c) Jakob mohl začít řadu s čísly 2 a 10: 2, 10, 2+10 = 12, 10+12 = 22, 12+22 = 34. Nebo mohl začít i s jinou kombinací uvedenou v řešení tohoto příkladu za d).

d) Matematicky je možno prvních pět členů řady vyjádřit takto:
$a, b, a + b, b + (a + b) = a + 2b, (a + b) + (a + 2b) = 2a + 3b = 34$
Dosazování čísel za neznámou *a* nalezneme těchto 5 možných dvojic: **(2, 10); (5, 8); (8, 6); (11, 4); (14, 2).**

Příklad 3

a) Jen kameny 1-6, 2-5, 3-4 mají součet rovný 7.

b) Jen kameny 0-0, 0-1, 5-6 a 6-6 mají součty, které se neopakují na dalším kamenu.

c) Tabulka s rozborem hodnot součtů (AS) na kamenech:

Sibylla	Anna	Eva	Počet možností
AS=1: 0-1	AS=2: 0-2, 1-1	AS=4: 0-4, 1-3, 2-2	$1\cdot2\cdot3=6$
AS=2: 0-2, 1-1	AS=4: 0-4, 1-3, 2-2	AS=8: 2-6, 3-5, 4-4	$2\cdot3\cdot3=18$
AS=3: 0-3, 1-2	AS=6: 0-6, 1-5, 2-4, 3-3	AS=12: 6-6	$2\cdot4\cdot1=8$

Pokud by Sibylla měla součet nula, měly by i ostatní součet nula.
Pokud by Sibylla měla součet větší jak 3, musela by Eva mít součet větší jak 12 a to není možné. Celkem je tedy k dispozici **32 možností**.

Příklad 4

a) Eva vyhraje v **6. tahu**.

Tah	Hráč	Dosud zabarvil	V novém tahu zabarví	Celkem zabarvil
1	A	0	1	1
	E	0	1	1
2	A	1	1	2
	E	1	2	3
3	A	2	3	5
	E	3	5	8
4	A	5	8	13
	E	8	13	21
5	A	13	21	34
	E	21	34	55
6	A	34	55	89
	E	**55**	**89**	**>100**

b) Pokud hledáme nejmenší číslo, bude vhodné postupně testovat čísla 2, 3, …
Když začne Adam s dvěma poli, vyhraje Eva v 6. tahu se 110 obarvenými.
Když Adam Začne **s třemi poli, zvítězí on v 5. tahu** se 102 obarvenými.

c) Největší číslo menší než 20, které splňuje podmínku zadání **je 12**. V tom případě Adam vyhraje ve 4. tahu.

Bodové hodnocení úloh:

1.	a) Výsledek	1 bod
	b) Výsledek	2 body
	c) Výsledek (možno dát část z dvou bodů za postupy v hledání)	2 body
2.	a) Výsledek	1 bod
	b) Výsledek	1 bod
	c) Výsledek (jedno správné řešení)	1 bod
	d) Výsledek (půl bodu za každý správný výsledek jiný než v bodu c)	2 body
3.	a) Výsledek	1 bod
	b) Výsledek (čtvrt bodu za každé nalezené řešení z celkem čtyř)	1 bod
	c) Výsledek (možno udělit část bodů za neúplně vyřešený příklad)	3 body
4.	a) Výsledek	1 bod
	b) Výsledek (možno 1 bod za vyloučení začátku s dvěma poli)	2 body
	c) Výsledek (možno dělit body za pokusy nalézt řešení)	2 body