Matematická soutěž ADAM RIES

Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Podkrušnohorské gymnázium, Most

28.-29.3.2012

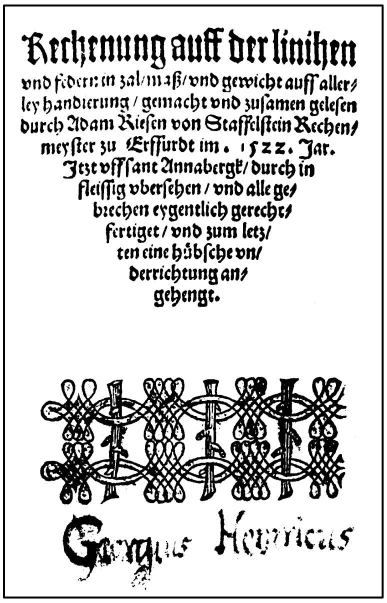
MOST
PODKRUŠNOHORSKÉ
VŠEOBECNÉ A SPORTOVNÍ GYMNÁZIUM

Ústecký kraj

Matematická soutěž Adama Riese 2012 – 2. kolo

Poznámka: Uvádějte celé postupy řešení včetně všech pomocných výpočtů. Všechna svá tvrzení formulujte přesně a nezapomeňte na zdůvodnění.

Úloha č. 1:


Rechenung auff der linihen
vnd federn: in zal/ maß/ vnd gewicht auff aller-
ley handierung / gemacht vnd zusamen gelesen
durch Adam Riesen von Staffelstein Rechen-
meyster zu Erffurdt im . 1522 . Jar.
Jetzt vff sant Annabergk/ durch in
fleissig vbersehen / vnd alle ge-
brechen eygentlich gerecht-
fertiget / vnd zum letz-
ten eine hübsche vn-
derrichtung an-
gehengt.

Adam Ries ve své druhé knize úloh poprvé vydané roku 1522 vytvořil příklady, které se týkají nákupu a prodeje různého zboží a s tím spojeného dosažení zisku. Obchodník nakupuje zboží za nižší cenu než za jakou následně zboží prodává. (Obrázek vpravo ukazuje titulní stránku druhého vydání této knihy z roku 1525.) Základní informace pro naše následující počítání jsou tyto:

> Obchodník prodává 1 libru zázvoru za 11 šilinků a 6 haléřů. Zisk obchodníka je 15 guldenů z každých 100 guldenů. (Jinak řečeno: Množství zázvoru, které nakoupí za 100 guldenů, prodá svým zákazníkům za 115 guldenů.)

V době, ve které žil Adam Ries, se platilo guldeny, šilinky a haléři. Mezi jednotkami platily následující převody:
1 gulden = 20 šilinků, 1 šilink = 12 haléřů.
Libra byla jednotka hmotnosti.

Vyřeš následující úlohy:

a) Zákazník si koupil 4 libry zázvoru. Vypočti, kolik za tento zázvor zaplatil. Výslednou cenu udej tak, aby bylo zapotřebí co nejmenšího počtu mincí.

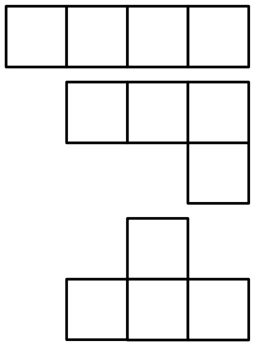
b) Jiný zákazník má 20 guldenů. Chtěl by za celočíselný počet guldenů (to znamená za částku, kterou můžeme vyjádřit jen v guldenech bez šilinků a haléřů) nakoupit celočíselné množství liber zázvoru. Zjisti, zda je to možné.

c) Obchodník prodává 1 libru zázvoru za 11 šilinků a 6 haléřů. Zisk obchodníka je 15 guldenů z každých 100 guldenů. (Jinak řečeno: Množství zázvoru, které nakoupí za 100 guldenů, prodá svým zákazníkům za 115 guldenů.). Za jakou cenu obchodník nakoupil zázvor?

Úloha č. 2:

Jednotkové čtverce (JČ) jsou takové čtverce, jejichž délka strany se rovná jedné délkové jednotce (DJ). Tyto jednotkové čtverce budeme umisťovat vedle sebe tak, že každé dva budou mít společnou právě jednu svou stranu. Spojení dvou jednotkových čtverců označme jako dvoučtverec, tří jednotkových čtverců označme jako tříčtverec, čtyř jednotkových čtverců jako čtyřčtverec, pěti jednotkových čtverců jako pětičtverec a tak dále.

Vyřešte následující úlohy:

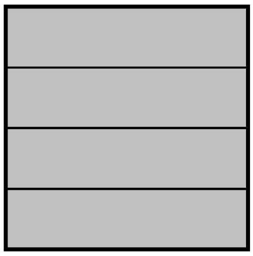


Obrázek 1

a) Existuje právě pět různých čtyřčtverců. (Za různé považujeme jen taková, které nevzniknou otočením nebo zrcadlením již existujících čtyřčtverců.) Na Obrázku 1 vpravo jsou nakresleny tři různé čtyřčtverce.

   Nakresli dva zbývající čtyřčtverce.

   Všechny čtyřčtverce mají stejný obsah rovný 4 JČ. Ukaž, že ne všechny čtyřčtverce mají stejný obvod.

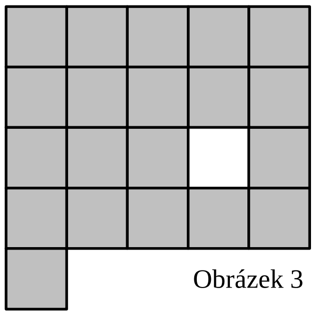


Obrázek 2

b) Čtvercovou plochu o obsahu 16 JČ chceme kompletně složit ze **stejných** čtyřčtverců tak, aby se žádné dva čtyřčtverce **navzájem nepřekrývaly**. Na Obrázku 2 vpravo je znázorněno vytvoření této čtvercové plochy ze čtyř stejných „přímých“ čtyřčtverců.

   S kterými dalšími stejnými čtyřčtverci můžeme vytvořit stejnou čtvercovou plochu o obsahu 16 JČ? Nakresli všechny možné varianty.

   V případě, že s některým čtyřčtvercem toto není možné, toto své tvrzení zdůvodni.



Obrázek 3

c) Našich 5 různých čtyřčtverců dává dohromady plochu 20 JČ. Bohužel není možné těchto 5 různých čtyřčtverců položit vedle sebe bez překrytí tak, aby vytvořily obdélník o velikosti stran 5 x 4 DJ. Můžeme je ale položit vedle sebe tak, jak je zobrazeno na Obrázku 3 vpravo (jedna strana je delší a uvnitř máme jeden čtverec prázdný).

   Zakresli jedno možné uspořádání našich pěti různých čtyřčtverců tak, aby vytvořily útvar na Obrázku 3.

d) Pokud použijeme současně dvě sady našich pěti různých čtyřčtverců (to znamená, že každý čtyřčtverec použijeme právě dvakrát), můžeme vytvořit úplný obdélník o velikosti stran 8 x 5 DJ. Nakresli jedno takové možné uspořádání těchto čtyřčtverců.

Úloha č. 3:

V matematice často hraje důležitou roli vyhledávání „všech možností“. Také vy se pokuste v následujících úlohách vyhledat všechny možnosti.

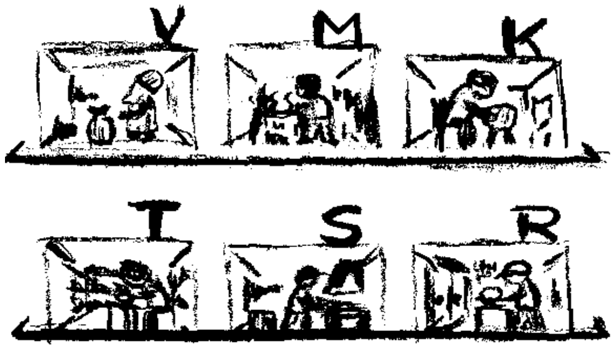
Tradice ruční výroby vánočních figurek trvá v Krušných horách až do dnešních dnů. V této úloze půjde o uspořádání figurek a výběr vánočních ozdob.

Při zápisu nalezených řešení používej písmena uvedená v závorkách.

3.1. Figurky krajkářky (K), malíře (M), rybáře (R), ševce (S), tesaře (T) a výrobce hraček (V) mají být uspořádány na dvě police umístěné nad sebou. (všechna uspořádání budeme zapisovat zleva doprava)

a) Hanka umístila figurky R, S a T na dolní polici. Vypiš všechna možná různá uspořádání těchto tří figurek.

Potom postavila V, K a M na horní polici tak, že V umístila na první místo zleva.



Kolik různých uspořádání všech šesti figurek je možno za těchto podmínek vytvořit?

b) Matouš ze zeptal Hanky, kolik je celkem různých možností uspořádání figurek, pokud současně platí následující tři podmínky:
1) Figurka V stojí na horní polici první zleva.
2) Na horní polici stojí ještě figurka K a jedna libovolná figurka
3) Zbývající tři figurky stojí na dolní polici.

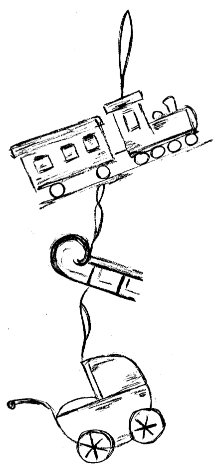
3.2. Na vánočním trhu uviděli Hanka a Matouš ozdoby na vánoční stromek: modré (S_b), zelené (S_g) a červené (S_r) sáňky, auto (A), lokomotivu (E), hasiče (F), kočárek (P) a traktor (T). Na pořadí ozdob v následujících výběrech nezáleží.

a) Matouš si vybral právě jedny sáňky a dvě jiné ozdoby.

Vypiš všechny možné varianty výběru v případě, kdy si Matouš vybral modré (S_b) sáňky. Varianty vypisuj S_bAE, ...

Kolik různých možností výběru má Matouš celkem (když si Matouš vybral právě jedny sáňky a dvě jiné ozdoby)?

b) Teď se Hanka zeptala Matouše, kolik celkem různých možností výběru má, když mezi třemi vybranými ozdobami jsou nejvýše jedny sáňky?



Úloha č.4:

Skupina studentů si mezi sebou rozdělila příklady domácího úkolu z matematiky tak, že každý vyřeší právě jednu úlohu. Večer si mezi sebou zatelefonují a vymění si výsledky tak, aby na konci telefonování měl každý student výsledky všech příkladů domácího úkolu. Vždy si telefonují pouze dva studenti, konferenční hovory více studentů současně nejsou přípustné.

Pokud jsou studenti dva, potřebují ke kompletní výměně výsledků uskutečnit jeden telefonický hovor.
Pokud jsou studenti 3 (označme je A, B, C), potřebují ke kompletní výměně výsledků (výsledky označme malými písmeny a, b, c) uskutečnit alespoň tři telefonické hovory. Hovory můžeme shrnout do následující tabulky:

Počet telefonických hovorů	**Účastnící hovoru**	**A**	**B**	**C**
0		a	b	c
1	A – B	ab	ab	c
2	A – C	abc	ab	abc
3	B – C	abc	abc	abc

a) Dokonči následující tabulku, ve které předpokládáme 4 studenty (A, B, C, D). Uveď nejmenší možný počet telefonických hovorů, které jsou zapotřebí ke kompletní výměně výsledků.

Počet telefonických hovorů	**Účastnící hovoru**	**A**	**B**	**C**	**D**
0		a	b	c	d
1	A – B	ab	ab	c	d
2	C – D	ab			
3					

b) Dokaž, že při pěti studentech stačí ke kompletní výměně výsledků 6 telefonických hovorů.

c) Vypiš seznam hovorů a zjisti jejich nejmenší možný počet pro sedm studentů.