Soutěž Adama Riese 2011

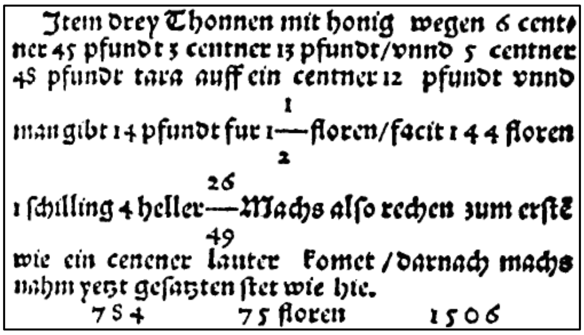
Podkrušnohorské gymnázium, Most

8.4.2011

Poznámka: Uvádějte celé postupy řešení včetně všech pomocných výpočtů. Všechna svá tvrzení formulujte přesně a nezapomeňte na zdůvodnění.

Úloha č. 1:

Adam Ries ve své druhé sbírce úloh vydané roku 1522 uvedl úlohy na výpočet ceny zboží, ve kterých je zapotřebí zohlednit i hmotnost obalu zboží. Originál textu zadání můžete vidět v rámečku vpravo, čísla v zadání byla pozměněna:


Item drey Thonnen mit honig wegen 6 centner 45 pfundt 3 centner 13 pfundt/vnnd 5 centner 45 pfundt tara auff ein centner 12 pfundt vnnd man gibt 14 pfundt fur $1\frac{1}{2}$ floren/facit 144 floren 1 schilling 4 heller $\frac{26}{49}$ Machs also rechen zum ersten wie ein centner lauter kompt/darnach machs nahm yetzt gesatzten stet wie hie.
754 75 floren 1506

> Máme tři sudy s medem. První sud váží celkem 6 centů a 45 liber, druhý váží celkem 3 centy a 13 liber a třetí váží celkem 7 centů a 92 liber.

V každém jednom centu celkové hmotnosti sudu s medem je obsaženo 12 liber hmotnosti obalu. Cena za 14 liber medu je 1 gulden a 10 šilinků.

Za doby života Adama Riese se kromě jiného platilo také guldeny a šilinky. Pro tyto dvě měny platil přepočet: 1 gulden = 20 šilinků.

Centy a librami se udávala hmotnost. Přepočet pro tyto dvě jednotky byl: 1 cent = 100 liber.

a) Jaká je celková hmotnost všech tří sudů s medem? Udej výslednou hmotnost tak, aby počet liber byl co možná nejmenší.

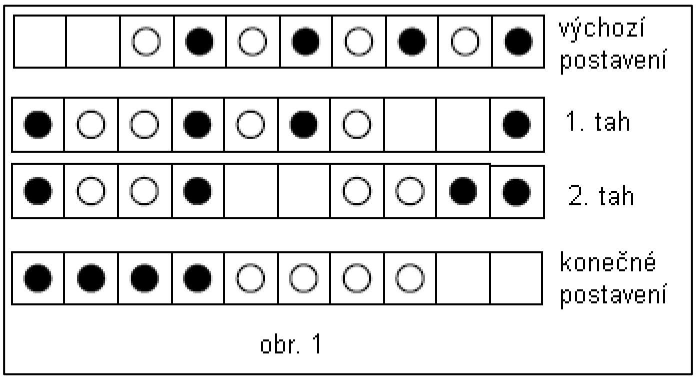
b) Vypočti celkovou hmotnost medu, který se nachází v těchto třech sudech.

c) Vypočti celkovou cenu medu v těchto třech sudech. Cenu udej v guldenech.

Úloha č. 2:

Máme 4 černé hrací figurky a 4 bílé hrací figurky. Tyto jsou postaveny na deseti vodorovně vedle sebe umístěných hracích polích tak, že první dvě hrací pole zleva jsou neobsazena a figurky se střídají podle barev bílá – černá tak, jak je zobrazeno na obr. 1 vpravo – výchozí postavení.

Cílem hry je uspořádá figurky pomocí určitého počtu tahů tak, že všechny černé figurky budou stát vedle sebe a budou následovány všemi bílými figurkami přesně tak, jak je zobrazeno na obrázku konečného postavení vpravo.



obr. 1

V každém tahu smíme přenášet najednou vždy pouze dvojici vedle sebe stojících figurek a uspořádání těchto figurek ve dvojici nesmíme během tahu měnit.

a) Na obr. 1 jsou kromě výchozího a konečného postavení zobrazeny také 1. a 2. tah hry. Ukaž, že je u této hry možné dosáhnout tohoto konečného postavení čtvrtým tahem. Nakresli postavení figurek po třetím tahu.

b) Nyní zvýšíme počet hracích políček na 12, počet černých na 5 a počet bílých figurek také na 5. Způsob tažení figurek zůstává stejný, výchozí i konečné postavení figurek také, jen figurek je o dvě více, celkem 10.

   Nalezni nejmenší počet tahů potřebných k dosažení konečného postavení. Nakresli postavení figurek po každém tahu hry.

c) Zdůvodni, že tuto hru nelze úspěšně dohrát, pokud máme 2 černé a 2 bílé figurky.

d) Předpokládejme, že pro každé přirozené číslo *n* větší nebo rovno 4, které udává počet černých a bílých figurek ve hře, je konečné postavení dosažitelné minimálně pomocí *n* tahů.

   Zjisti, zda tento vztah platí také pro počet figurek rovný třem pro každou barvu. Případně urči nejmenší možný počet tahů pro dosažení konečného postavení v této hře a nakresli postavení figurek po každém tahu této hry.

Úloha č. 3:

Čísla mají někdy zvláštní vlastnosti. Napiš na papír číslo 608. Otoč papír o 180 stupňů a podívej se na toto číslo otočené vzhůru nohama. Uvidíš opět číslo, tentokrát 809.

Existují přirozená čísla, která po otočení o 180 stupňů dají opět přirozené číslo. Takovým číslům budeme v této úloze říkat **čísla otočená**. Například číslo l (jedna) zapsáno tímto vzhledem (písmem) je po svém otočení o 180 stupňů opět číslo, čísla 2 a 5 po otočení o 180 stupňů žádné číslo neznamenají.

Existují přirozená čísla, která nejenže po svém otočení dají opět přirozené číslo, ale dají přirozené číslo se stejnou hodnotou jako bylo číslo původní. Např. číslo 6l9 má tuto vlastnost. Takovým číslům budeme v této úloze říkat **čísla postavená na hlavu**.

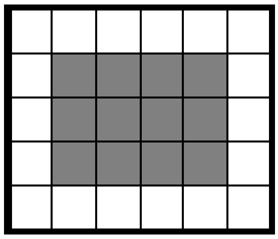
a) Rozhodni, zda jsou následující tvrzení pravdivá nebo nepravdivá. Nepravdivá tvrzení zdůvodni.
   1) Číslo 89098 je číslo otočené, ale není to číslo postavené na hlavu.
   2) Existuje právě pět jednociferných otočených čísel.
   3) Číslo 9l6 je největší trojciferné číslo postavené na hlavu.

b) Nyní nás budou zajímat pouze dvouciferná otočená čísla. U otočených čísel můžeme vypočítat rozdíl mezi původní hodnotou a otočenou hodnotou tohoto čísla (Např. 96 – 69 = …). Nalezni takové dvouciferné otočené číslo, pro které bude tento rozdíl největší ze všech dvouciferných otočených čísel. (Při odčítání odečítáme vždy menší hodnotu od větší.). Své tvrzení zdůvodni.

c) Existují přesně 4 dvouciferná čísla postavená na hlavu. Vypiš je seřazená podle velikosti od nejmenšího k největšímu.
Z těchto dvouciferných čísel postavených na hlavu se dají pomocí logické úvahy snadno určit všechna tříciferná čísla postavená na hlavu. Vypiš všechna tato čísla podle velikosti od nejmenšího k největšímu.
Odvoď z těchto úvah počet všech čtyřciferných čísel postavených na hlavu. (Stačí počet, není nutné je vypisovat).

Úloha č. 4:

Pravoúhelník se skládá ze šedivých čtverců (tzv. vnitřní čtverce). Tento pravoúhelník je kompletně ohraničen bílými čtverci (tzv. vnější čtverce). Obrázek vpravo ukazuje pravoúhelník, který se skládá z 12 vnitřních čtverců a z 18 vnějších čtverců. (Pozn. dva takové pravoúhelníky jsou shodné, pokud pomocí otočení jednoho z nich dostaneme druhý.)



a) Nakresli takový pravoúhelník, který se skládá ze 6 vnitřních čtverců a 14 vnějších čtverců.

   Zjisti, zda existuje pravoúhelník, který se skládá ze 6 vnitřních čtverců a 16 vnějších čtverců. Své tvrzení zdůvodni.

b) Máme pravoúhelník, který je tvořen 20 vnějšími čtverci. Zjisti všechny možné počty vnitřních čtverců, které mohou tvořit takový pravoúhelník.

c) Další pravoúhelník je tvořen 42 vnitřními čtverci. Ukaž, že existuje taková varianta pravoúhelníku, jehož počet vnějších čtverců není beze zbytku dělitelný číslem 5 a dokaž, že jiný takový pravoúhelník neexistuje.